UDK 001(05)=089.2
YU ISSN 0048-9557

SCIENCA REVUO

Vol.28,n-ro 5(127)
20.10.1977.

Aperas 6-foje jare. Jarabono: 56 stelojn, 15 ned.guld., 6 us. dol., 100 jug.din.

ASTRONOMIA NUMERO 4

TEORIO DE ORBITOJ DE PLANEDETOJ KAJ KOMETOJ
KUN LA EKIRAJ VEKTORAJ POZICIO KAJ RAPIDO KIEL LA ORBITELEMENTOJ

(Boĵ. Popoviĉ, Beograd, Jugoslavio)+/

+/ Universitata profesoro, D-ro de matematikaj sciencoj, Ognjena Price 80, 11000 Beograd, Jugoslavio

E N K O N D U K O

O R B I T E L E M E N T O J

La problemo pri du korpoj estas relative simpla problemo de ĉielmekaniko, ĉar la integrigo okazas sen malfacilaĵoj. Sed la praktika eltrovado de efemeridoj, orbitoj kaj iliaj perturboj (pro la eksteraj influoj) ofte enportas multajn malfacilaĵojn, precipe pro la neceso pritrakti la problemon diversmaniere depende de tio ĉu la orbito estas elipsa, parabola aŭ hiperbola (la komplikaĵoj estas aparte grandaj kiam la orbito estas preskaŭparabola).

La problemo aktualiĝis denove lasttempe pro la utiligado de la elektronaj kalkuliloj. Kiam oni havis nur la simplajn kalkulrimedojn, oni uzis nur la sferajn elipsajn elementojn a,e,i,Ω,ω,l (resp. π) kaj la respektivajn elementojn por parabolo aŭ hiperbolo. Poste jam la teoriaj esploroj montris gravan utilon el la uzado de aliaj orbitelementoj, precipe *kanonaj elementoj* kaj la *vektoraj elementoj* $\vec{c},\vec{e}$,T. Kaj la utiligado de kalkulmaŝinoj eĉ pli elstarigis la neceson utiligadi vektorajn elementojn (ĉu $\vec{c},\vec{e}$,T, ĉu aliajn ajn kombinaĵojn).

Sed la elektronaj kalkuliloj postulas de la uzataj elementoj ankoraŭ multon pli, precipe ebligi pli senĝenan aŭtomatecon en la maŝinlaboro, ankaŭ nemalsamecon por diversaj eblaj aperontaj kazoj, t.e. sendependecon de la orbitaspekto (ĉe iuj elementoj kaj la metodoj okazas ekz. komplikaĵoj pro tre malgrandaj inklinoj aŭ/kaj la ekscentriĝoj, anstataŭ ke la problemo estu pli simpla tiukaze!).

Ĉi tiujn postulojn povas plenumi nur la vektoraj elementoj $\vec{r}_0$,$\vec{v}_0$, t.s. la pozici'vektoro kaj la rapid'vektoro de la astro, en la difinita momento t_0. Pro tio la uzadon de ĉi tiuj elementoj oni renkontas lasttempe ĉiam pli ofte, kvankam ilin utiligadis (en la skalara formo) jam Lagrange (1769.), Andoyer (1917.) kaj aliaj. De la plej novaj tiaj verkaĵoj ni menciu nur kelkajn plej karakterizajn: Kustaanheimo (1960.), Sconzo, Schach kaj Toberg (1965.), Sconzo (1964), Goodyear (1965.).

LA RIMARKO Por ke oni povu utiligadi ankaŭ la rezultatojn en jam trovita formo kun aliaj elementoj, en la lasta ĉapitro mi donis la eblecon por transiri de aliaj elementoj (la plej oftaj) al la vektoraj elementoj $\vec{r}_0$,$\vec{v}_0$.

Pro tio ĉi tiu monografio havas la celon doni la kompletan teorion de dukorpa problemo, kun la utiligo de nur $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$, kiel la orbitelementojn, - ekde la moviĝekvacioj, tra la eltrovado de la orbitelementoj kaj de la efemeridoj - ĝis la perturboj de la orbitelementoj sub influo de la ajna perturboforto.

1. INTEGRIGO DE LA MOVIĜEKVACIOJ

Preninte ke $\vec{r}$ kaj $\vec{v}$ estu la pozicio kaj la rapido de unu korpo (maso m) rilate al alia korpo (maso M), la ekvacioj de la moviĝo de ĉi tiu korpo estas

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\,,\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \mu r^{-3}\vec{r}\,,\quad \mu = k^2(M+m)\,,\quad r=|\vec{r}| \quad . \tag{1}$$

La unua integralo estos tuj

$$\vec{r}\times\vec{v} = \vec{c} = \vec{r}_0\times\vec{v}_0\,, \tag{2}$$

ĉe kio $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$ signas la pozici- kaj rapid-vektorojn en difinita momento t_0. Ĉi tio montras ke

(3) $\vec{r}.\vec{c} = 0$, $\vec{v}.\vec{c} = 0$, $\vec{r}_0.\vec{c} = 0$, $\vec{v}_0.\vec{c} = 0$,

sekve la moviĝo okazas en la ebeno difinita per la konstanta vektoro $\vec{c}$, respektive per la ekiraj vektoroj $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$. Pro tio oni povas tuj preni la formon de Lagrange (1769.):

(4) $$\vec{r} = f\,\vec{r}_0 + g\,\vec{v}_0$$

kaj la problemo reduktiĝas je la eltrovado de la variablaj kvantoj f,g.

Kiel la unua paŝo, la esprimo

(5) $$\vec{v} = f'\vec{r}_0 + g'\vec{v}_0$$

enigita en (1) donas

$$f''\vec{r}_0+g''\vec{v}_0= -\mu r^{-3}(f\vec{r}_0+g\vec{v}_0)$$

(6) $$f'' = -\mu f r^{-3}, \quad g'' = -\mu g r^{-3}$$

(6a) $$r^2= f^2\vec{r}_0^{\,2} + 2fg(\vec{r}_0\cdot\vec{v}_0) + g^2\vec{v}_0^{\,2}$$

Ĉi tiuj ekvacioj donas

$$fg'' - gf'' = 0$$

kio montras ke $fg'-gf'$ estas konstanta kvanto, kies valoron oni povas trovi el la *ekiraj kondiĉoj*

(7) $$t=t_0 \; : \; f=1, \quad g=0, \quad f'=0, \quad g'=1,$$

devenantaj el (4) kaj (5) por la momento $t=t_0$. Laŭ tio estas

(8) $$fg'-f'g = 1$$

Parenteze: La saman rezultaton oni havas eniginte (4) kaj (5) en la trovitan unuan integralon (2); ni menciu ankaŭ ke la unuo-vektoro de ĉi tiu integralo estas jam utiligita per la preno de la formo (4) por $\vec{r}$, t.e. per limiĝo je la ebeno $\vec{c}$.

La ekvacioj (1) kaj (2), konvene kombinataj, donas

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\times\vec{c} = -\mu r^{-3}\left[(\vec{r}.\vec{v})\vec{r}-r^2\vec{v}\right]$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\times\vec{c}) = \mu\,\frac{r\vec{v}-r'\vec{r}}{r^2} = \mu\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Kaj de tie tuj sekvas la dua integralo

(9) $$\vec{v}\times\vec{c} - \mu\vec{r}/r = \mu\vec{e} = \vec{v}_0\times\vec{c}-\mu\vec{r}_0/r_0$$

respektive

$$f'(\vec{r}_o\times\vec{c}) + g'(\vec{v}_o\times\vec{c}) = \vec{v}_o\times\vec{c} + \mu\vec{r}/r - \mu\vec{r}_o/r_o \tag{9a}$$

Multiplikita (skalare) per $\vec{v}_o,\vec{r}_o$, ĉi tiu ekvacio donas

$$f' = \mu\frac{\vec{r}_o\cdot\vec{v}_o}{c^2 r_o} - \mu\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}_o}{c^2 r} = \frac{\mu}{c^2}\vec{v}_o\cdot\left(\frac{\vec{r}_o}{r_o} - \frac{\vec{r}}{r}\right) \tag{10}$$

$$g' = 1 - \frac{\mu}{c^2}r_o + \mu\frac{\vec{r}.\vec{r}_o}{c^2 r} = 1 - \frac{\mu}{c^2}\vec{r}_o\cdot\left(\frac{\vec{r}_o}{r_o} - \frac{\vec{r}}{r}\right) \tag{11}$$

Antaŭ ol pluen integri ĉi tiujn ekvaciojn, ni rememoriĝu pri (8), por vidi ke oni povas havi tuj unu ligaĵon inter f kaj g, sendependan de la derivoj, nome

$$fg'-f'g = 1 = f - \frac{\mu}{c^2}(f\vec{r}_o+g\vec{v}_o)\left(\frac{\vec{r}_o}{r_o} - \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$(1-f)c^2 = \mu\vec{r}\left(\frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{r}_o}{r_o}\right) = \mu r - \mu\frac{\vec{r}.\vec{r}_o}{r_o} \tag{12}$$

Al ĉi tiu ligaĵo ni donu pli eksplican formon, forigante neraciaĵon ekzistantan en r, donata per la esprimo (6), per simpla kvadratigo:

$$(1-f)^2c^4 + \mu^2 r_o^{-2}\left[r^2\vec{r}_o^2 - (\vec{r}\times\vec{r}_o)^2\right] + 2(1-f)c^2\mu(fr_o^2+g\vec{r}_o\cdot\vec{v}_o):r_o = \mu^2 r^2$$

$$(1-f)^2c^2 - \mu^2 r_o^{-2}g^2 + 2\mu f r_o(1-f) + 2\mu g(1-f)\vec{r}_o\cdot\vec{v}_o:r_o = 0$$

$$\mu^2g^2 - 2\mu g r_o(1-f)\vec{r}_o\cdot\vec{v}_o - r_o^2(1-f)\left[2\mu r_o f + c^2(1-f)\right] = 0 \tag{13}$$

La ligo de g kun f, resp. kun 1-f, estas donita en la formo (12) aŭ (13). Restas ankoraŭ integri el la ekvacioj (10), (11) kaj tiam havi ĉiujn bezonatajn kvantojn: f, g, f´, g´. La integrigo povas esti efektivigita nur pere de helpvariablo. Por plifaciligi tion, ni esprimu eksplice

$$\mu g = r_o(1-f)(\vec{r}_o\vec{v}_o) \pm \sqrt{\{r_o^2(1-f)^2(\vec{r}_o\vec{v}_o)^2 + r_o^2(1-f)^2(c^2-2\mu r_o) + 2\mu r_o^3(1-f)\}} =$$

$$= r_o(1-f)(\vec{r}_o\vec{v}_o) \pm r_o\sqrt{\{(1-f)^2(r_o^2\cdot\vec{v}_o^2 - 2\mu r_o) + 2\mu r_o(1-f)\}}$$

Pro pli mallonga skribo (tio ja havas ankaŭ difinitan signifon), ni metu

$$\vec{v}_o^2 - 2\mu/r_o = -\mu/a \tag{14}$$

kaj ni havos

$$\mu g = r_o(1-f)\vec{r}_o\cdot\vec{v}_o \pm r_o\sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\{2r_o a(1-f) - r_o^2(1-f)^2\}} \tag{15}$$

1.1. Reguliga anomalio. Funkcioj de Stumpff

Por plisimpligi ĉi tiun esprimon, kaj samtempe plisimpligi la restan integrigon, ni enkonduku novan variablon, ξ, tian ke oni povu liberiĝi de la kvadrat'radiko, t.e.

$$r_0(1-f) = a(1-\cos\xi) \;, \qquad (t=t_0 \;,\; \xi=o) \tag{16}$$

kaj (15) donas

$$\mu g = (\vec{r}_0\vec{v}_0)a(1-\cos\xi) + r_0\sqrt{\mu a}\,\sin\xi \tag{17}$$

(La signo antaŭ $\sin\xi$ estu prenita +, por havi pozitivajn ξ kaj g en la direkto de $\vec{v}_0$ kaj negativajn en la kontraŭa direkto, ĉar pro $\sin\xi\approx\xi, 1-\cos\xi\approx\xi^2/2$, por tre malgrandaj ξ, en reala kazo μg havas certe la signon de la dua membro).

Oni havas plue, el (12), utiligante (16), (17), poste (2), (14):

$$\mu r r_0 = r_0(1-f)c^2 + \mu f r_0^2 + \mu g(\vec{r}_0\vec{v}_0) = ac^2(1-\cos\xi) + \mu r_0(r_0-a+a\cos\xi) +$$

$$+ (\vec{r}_0\vec{v}_0)^2 a(1-\cos\xi)+r_0\sqrt{\mu a}(\vec{r}_0\vec{v}_0)\sin\xi = a(1-\cos\xi)(r_0^2\vec{v}_0^2-\mu r_0)+\mu r_0^2+r_0\sqrt{\mu a}(\vec{r}_0\vec{v}_0)\sin\xi =$$

$$= \mu r_0(1-\cos\xi)(a-r_0) + r_0\sqrt{\mu a}(\vec{r}_0\vec{v}_0)\sin\xi$$

Tiel oni akiras simplan esprimon

$$r = r_0 + (a-r_0)(1-\cos\xi) + \eta\sqrt{ar_0}\,\sin\xi \;, \qquad \eta = \frac{\vec{r}_0\vec{v}_0}{\sqrt{\mu r_0}} \tag{18}$$

Post tio, la ekvacio (8) estas pli konvena - ol (10) aŭ (11) - por la integrigo. Utiliginte (16) kaj (17) kaj espriminte ĉion per ξ, (8) fariĝas

$$(r_0-a+a\cos\xi)(\vec{r}_0\cdot\vec{v}_0 a\sin\xi + r_0\sqrt{\mu a}\cos\xi)\xi' + a\sin\xi\left[(\vec{r}_0\vec{v}_0)a(1-\cos\xi)+r_0\sqrt{\mu a}\,\sin\xi\right]\xi' = \mu r_0$$

$$\left[r_0 a(\vec{r}_0\vec{v}_0)\sin\xi + r_0(r_0-a)\sqrt{\mu a}\,\cos\xi + r_0 a\sqrt{\mu a}(\cos^2\xi+\sin^2\xi)\right]\xi' = \mu r_0$$

$$\left[a(\vec{r}_0\vec{v}_0)\sin\xi + (a-r_0)\sqrt{\mu a}(1-\cos\xi) + r_0\sqrt{\mu a}\right]\xi' = \mu$$

Pro la valoro (18) de r, la ekvacio prenas la densan formon

$$r\cdot\frac{d\xi}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \tag{19}$$

kaj oni povas integri ĝin tuj:

$$(\vec{r}_0\vec{v}_0)\sqrt{\frac{a}{\mu}}\,(1-\cos\xi) + (a-r_0)(\xi-\sin\xi) + r_0\xi = \sqrt{\frac{\mu}{a}}(t-t_0) \tag{20}$$

La solvo por ξ estos reala nur se $a>o$. Sed la divido per ξ montras ke por $a<o$ oni havas pure malrealan ξ. Pro tio oni havos ĉiam realajn kvantojn

$$y = \xi\sqrt{\frac{a}{r_0}} \;, \quad \eta = \frac{\vec{r}_0\vec{v}_0}{\sqrt{\mu r_0}} \;, \quad \zeta = 1-\frac{r_0}{a}, \quad s = \sqrt{(\mu r_0^{-3})} \tag{21}$$

kun kiuj la ekvacio (20) fariĝas

$$(20a)\qquad y + \eta\cdot y^2.\frac{1-\cos\xi}{\xi^2} + \zeta y^3.\frac{\xi-\sin\xi}{\xi^3} = s(t-t_0)$$

La indikitaj funkcioj de ξ havas ĉiam realan valoron. Ilin enkondukis en la efemeridkalkulon K.Stumpff (1947), signatajn per

$$(22)\qquad c_0(\xi^2)=\cos\xi, \quad c_1(\xi^2)=\frac{\sin\xi}{\xi}, \quad c_2 = \frac{1-\cos\xi}{\xi^2}, \quad c_3 = \frac{\xi-\sin\xi}{\xi^3}$$

Ties plej praktika utiligo estas en la seria formo

$$(22a)\qquad \begin{cases} c_0(\xi^2) = 1 - \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^4}{4!} - \frac{\xi^6}{6!} + \ldots, \quad c_1 = 1-\frac{\xi^2}{3!} + \frac{\xi^4}{5!} - \frac{\xi^6}{7!} + \ldots \\ c_2 = \frac{1}{2!} - \frac{\xi^2}{4!} + \frac{\xi^4}{6!} - \frac{\xi^6}{8!} + \ldots, \quad c_k(\xi^2) = \frac{1}{k!} - \frac{\xi^2}{(k+2)!} + \frac{\xi^4}{(k+4)!} - \ldots, \end{cases}$$

el kiu vidiĝas same ilia realeco kiel la rapida konverĝo. Iliaj plej gravaj interligaĵoj estas:

$$(23)\qquad c_k(\xi^2) = \xi^{-k}\int_0^{\xi} t^{k-1}c_{k-1}(t^2)dt = \frac{1}{k!} - \frac{\xi^2}{(k+2)!} + \frac{\xi^4}{(k+4)!} - \frac{\xi^6}{(k+6)!} + \ldots$$

$$(24)\qquad \xi^2 c_{k+2}(\xi^2) = \frac{1}{k!} - c_k(\xi^2), \quad m c_{k+2}(m) = \frac{1}{k!} - c_k(m)$$

$$(25)\qquad \frac{d}{dy}(y^{k+1}c_{k+1}) = y^k c_k \qquad (y=\xi\sqrt{a/r_0})$$

La ĉiam realan variablon y enkondukis same Stumpff (1947, 1959), sed kun iom alia signifo, nome lia anomalio, esprimita per y, estas y/r_0 aŭ $y\tau/r_0$. La elekto kiun faris Popoviĉ (1959), doninte al y ankaŭ la nomon "anomalio de komenco", estas tia same pro efemeridkalkulado (ĉar ĝi ebligis tre simplan kalkuladon por ĉiuj eblaj kazoj) kiel pro la orbit'teorio (kie ĝi nenion komplikas, eĉ ebligas utiligon de ĉi tie donita esprimo por s).

Kustaanheimo kaj Nuottio (1966) montris bone la "reguligan" rolon de ĉi tiu anomalio, pro kio ŝajnas al mi plej konvena nomo estus *reguliga anomalio*. La helpa variablo ξ estis fakte necesa nur dum la derivado, oni eĉ povis eviti ĝin plene, enkondukante tuj y per

$$(19a)\qquad dt = dy\cdot r\,\sqrt{r_0/\mu}$$

Sed tiam la esprimoj renkontataj dum la derivado havus iom pli komplikan formon.

Do, kun la signaĵoj (22), la ekvacio (20a) prenas la praktikan formon

$$(20b)\qquad y = \frac{s(t-t_0)}{1+\eta y c_2 + \zeta y^2 c_3}$$

kaj ebligas facilan eltrovadon de la anomalio y per sinsekva proksimumigado, ekirante de $y=s(t-t_0)$.

2. EFEMERID'KALKULADO. FORMO DE ORBITO

La trovita ekvacio, en la formo (1,20b), estas fakte ĝeneraligo de la Keplera ekvacio. En iom alia formo, K. Stumpff (1947) nomis ĝin "Fundamentalgleichung". En ioma senco, precipe en la formo (20b), ĝi meritas tiun nomon kaj ni nomu ĝin *fundamenta ekvacio de dukorpa problemo*. Laŭ (1,21), kun a el (1,14), oni kalkulas la kvantojn η,ζ,s, tuj kiam oni havas la ekirajn donojn: t_0, $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$. Tiam la ekvacio (1,20b), helpe de la serioj (1,22a), kun $\xi^2=y^2r_0/a$, ebligas kalkuli la anomalion y por iu ajna momento t kaj samtempe la koncernajn valorojn de c_1, c_2, c_3. Post tio oni povas kalkuli, laŭ (1,16), (1,17):

$$f = 1 - y^2c_2 \tag{1}$$

$$sg = yc_1+\eta y^2c_2 \equiv yc_1+\eta(1-f) \tag{2}$$

kio donas senĝene la pozicivektoron (1,4):

$$\vec{r}_t = f\vec{r} + g\vec{v} \tag{3}$$

Ek de ĉi tie, por uzi malpli da indeksoj, anstataŭ $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$, ni skribu simple $\vec{r}$, $\vec{v}$ (por la momento t_0), kaj por la momento t ni uzu $\vec{r}_t$, $\vec{v}_t$, se estas danĝero pri konfuzo.

Tio sufiĉas por efemeridkalkulado - la plej simpla procedo por trovi la pozicion - en kiu ajn momento ni deziras. Ni menciu ke al la esprimo por g oni povas doni ankaŭ alian, iom pli praktikan formon. Nome, la utiligo de $c_1 = 1-(r_0/a)y^2c_3$ kaj de la fundamenta ekvacio rapide donas

$$sg = y- \frac{r_0}{a}y^3c_3+\eta y^2c_2 = y+\eta y^2c_2+\zeta y^3c_3-y^3c_3$$

do

$$sg = s(t-t_0)-y^3c_3 \ , \ g = t-t_0 - \frac{1}{s}y^3c_3 \tag{2a}$$

Se oni bezonas trovi ankaŭ la rapidvektoron $\vec{v}_t$(ekzemple se ni devas pro iu ajn ŝanĝi la ekiran momenton, tiam ni bezonas ankaŭ la rapid'vektoron en nova momento), en tiu kazo utilos la esprimoj por f', g'. Ilin oni povas preni el (1;10,11), sed pli simple estas derivi la esprimojn (1) kaj (2a) trans y, utiligante (1,19a) kaj (1,25). Tiel oni trovas

$$f'= -yc_1\cdot\frac{1}{r_t}\sqrt{\mu/r_0}$$

$$g'= 1 - (\frac{1}{s}y^2c_2)\frac{1}{r_t}\sqrt{\mu/r_0}$$

Post rearanĝo, ĉi tiuj derivoj fariĝas

$$f'= - \frac{r}{r_t}syc_1 \tag{4}$$

$$g'= 1 - \frac{r}{r_t}y^2c_2 \tag{5}$$

Ĉi tie r_t povas esti kalkulata ĉu kiel $|\vec{r}_t|$ ĉu el (1,18), nun en la formo

(6) $$r_t=rL, \quad L=1+\eta y c_1+\zeta y^2 c_2$$

Interesaj kaj utilaj, kunlige kun r_t, estas la esprimoj - akireblaj tre facile per (1;24,25):

(6a) $$\frac{dr_t}{dy} = r(\eta c_0+\zeta y c_1), \quad \frac{d^2 r_t}{dy^2} = r-(1-\zeta)r_t$$

Do la samaj kvantoj kalkulataj jam por f,g, ebligas tujan eltrovon de f´, g´, t.s. de la rapid'vektoro

(7) $$\vec{v}_t = f'\vec{r} + g'\vec{v}$$

Povus esti interesa ankaŭ la esprimo kiun, sen kalkulado de f´, g´, donas (1;10,11) kunigitaj en

$$\vec{v}_t= \frac{\mu}{c^2}\vec{v}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{r}_t}{r_t}\right)\vec{r}+\vec{v}- \frac{\mu}{c^2}\vec{r}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{r}_t}{r_t}\right)\vec{v} = \vec{v} - \frac{\mu}{c^2}(\vec{r}\times\vec{v})\times\left(\frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{r}_t}{r_t}\right)$$

fine

(8) $$\vec{v}_t = \vec{v} + \frac{\mu}{c^2}\vec{c}\times\left(\frac{\vec{r}_t}{r_t} - \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Per ĉi tiu vojo trovataj $\vec{r}_t$, $\vec{v}_t$, povas servi por koni la kompletan pozicion de la korpo (rilate la alian konatan astron), sed ili povas servi ankaŭ kiel la novaj elementoj por plua determinado de la pozicioj, do kiel la novaj orbitelementoj.

K i a e s t a s l a o r b i t o? Tion oni ne vidas el la esprimoj de ĉi tiu ĉapitro. Tio ĉi estas malavantaĝo, sed samtempe avantaĝo de ĉi tiu metodo: tute samspecaj kalkuloj - ĉiam realaj, senkonsidere la orbitaspekton. La argumento ξ^2 de la funkcioj (1,22) c_1, c_2, c_3 estas y^2r_0/a, kie y estas trovebla el (1,20b), ekirinte de la komenca valoro $y=s(t-t_0)$. Popoviĉ (1959) analizis ĉiujn eblajn kazojn kaj montris ke oni ĉiam povas trovi unu solvon por y.

La diverseco de la orbitoj montriĝas en rapideco de la konverĝo de la serioj (1,22). Se la argumento $\xi^2>0$, t.e. se $a>0$, la konverĝo estas tre rapida (pro la faktorialoj kaj pro la alterneco de la antaŭsignoj). Sed tiam estas ankaŭ ξ reala kvanto, pro kio f,g, f´, g´, estas periodaj funkcioj de tempo. La periodon T ni trovos metinte en (1,20) $\xi+2\pi$ anstataŭ ξ, kaj t+T anstataŭ t. Tio donas

(9) $$T = \frac{2\pi}{s}, \quad s^2 = \mu a^{-3}$$

La kazojn $a>0$, $a<0$, kaj iliajn ekstremojn, ni povas esplori pli bone pere de grando de la vektoro $\vec{e}$, donita per (1,9). Nome

$$\mu^2 e^2 = \vec{v}^2\vec{c}^2 - 2\frac{\mu}{r}(\vec{r}\vec{v}\vec{c})+\mu^2$$

La esprimo (1,14) por a, kune kun (1,2) donas

$$\mu^2 e^2 = c^2(-\frac{\mu}{a}) + \mu^2$$

(10) $$e^2 = 1 - \frac{c^2}{\mu a}$$

Tuj ni menciu ankaŭ alian interesan formon de ĉi tiu formulo. El

$$c^2 = r^2\vec{v}^2 - (\vec{r}\vec{v})^2 = r^2(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}) + \eta^2\cdot\mu r = \mu r(2 - \frac{r}{a} + \eta^2) = \mu r(1+\zeta-\eta^2)$$

oni havas

$$e^2 = 1 - \frac{r}{a}(1+\zeta-\eta^2)$$

(10a) $$e^2 = \zeta^2 + \eta^2(1-\zeta)$$

El (10) vidiĝas ke la grando e, nomata *ekscentriĝo de la orbito*, estas >1 aŭ <1 samtempe kun a>o aŭ a<o. Pro tio estas pritraktendaj la kazoj

$$o<e<1, \qquad e>1$$

kaj la limaj kazoj e=o, e=1.

Por la limkazo e=o, (10) donas $c^2=\mu a$. Sed tiam el (1,9) sekvas ankaŭ

(11) $$\vec{v}\times\vec{c} = \mu\vec{r}_t/r_t$$

kies skalara multipliko per $\vec{r}_t$ diras ke tiukaze $c^2=\mu r_t$. Do

(12) $$e=o \implies r_t=a,$$

kio signifas ke tiukaze a estas radiuso de cirkla orbito. La tuta kalkulo plisimpliĝas, ĉar (1;20a,21) donas

$$\eta=o, \quad \zeta=o, \quad s^2=\mu r^{-3}, \quad y=\xi=s(t-t_o)$$

Samtempe (1)-(5) fariĝas

$$\begin{cases} f=\cos y, & sg=\sin y, & \vec{r}_t=\cos y\cdot\vec{r}+\sin y\cdot\frac{\vec{v}}{s} \\ f'=-s\cdot\sin y, & g'=\cos y, & \vec{v}_t=s(-\sin y\cdot\vec{r}+\cos y\cdot\frac{\vec{v}}{s}) \end{cases}$$

Laŭ (11), sciante ke nun $c^2=\mu r$, oni havas

$$c^2\vec{v}_t=\mu(\vec{c}\times\vec{r}_t)/r, \quad \vec{v}_t= r^{-2}(\vec{c}\times\vec{r}_t),$$

do sekvas ankaŭ

(13a) $$\vec{r}_t=\cos y\cdot\vec{r} + \sin y\cdot\frac{\vec{c}\times\vec{r}}{\sqrt{\mu r}}, \quad \vec{v}_t= s(-\sin y\cdot\vec{r} + \cos y\cdot\frac{\vec{c}\times\vec{r}}{\sqrt{\mu r}})$$

Por la kazo e<1, ni jam vidis ke tiam la orbito estas perioda. En ĝi estas plej interesaj ekstremoj de r, kiuj - laŭ (1,19) - venos tiam kiam

$$(a-r)\sin\xi + \eta\sqrt{a/r_o}\cos\xi = o$$

(14) $$\operatorname{tg}\xi_0 = -\frac{\eta}{\zeta}\sqrt{(r_0/a)}$$

Se oni paralele serĉas la pozicion en kiu la astro havas la direkton de $\vec{e}$, t.e.

$$f\vec{r} + g\vec{v} \parallel (\vec{v}^2-\mu/r)\vec{r}-(\vec{r}\vec{v})\vec{v}$$

oni trovos la saman valoron por tgξ. Do: en la direkto $\vec{e}$ la korpo estas plej proksima (kaj plej malproksima) al la dua korpo (en la sunsistemo perihelio kaj afelio,, ĝenerale *periastro* kaj *apoastro*).

Por trovi la formon de la orbito, ni enkonduku la polusajn koordinatojn (r,θ), kun la direkto de la perihelio kiel la ekira akso por θ. Tiam la skalara multipliko de $\mu\vec{e}$ el (1,9) per $\vec{r}$ donas

$$(\vec{r}\ \vec{v}\ \vec{c}) - \mu r = \mu r e\cdot\cos\theta$$

$$\mu r(1+e\cdot\cos\theta) = c^2$$

(15) $$r = \frac{c^2/\mu}{1+e\cos\theta}$$

Do, por $0<e<1$, la orbito estas elipso, kun

$$r_{min}=\frac{c^2/\mu}{1+e}\ ,\ r_{max}=\frac{c^2/\mu}{1-e}\ ,\quad r_{min}+r_{max}=\frac{2}{1-e^2}\cdot c^2/\mu$$

Pro (10)

(16) $$r_{min}+r_{max} = 2a$$

kio montras ke 2a estas la granda akso de la elipsa orbito.

El (15) oni vidas ankaŭ ke *por e>1* la orbito estas hiperbolo kaj *por e=1 parabolo*. Ni pritraktu unue la limkazon e=1. Tiam (10) donas $a=\infty$ kaj el la ekvacioj (1,20a) oni vidas ke por $a\to\infty$, $\xi\to 0$. La funkcioj (1,22) havas la limojn $c_1=1$, $c_2=\frac{1}{2}$, $c_3=\frac{1}{6}$, krome $\zeta\to 1$, post kio oni povas trovadi y el la ekvacioj (1,20b) kiel

(17) $$y = \frac{s(t-t_0)}{1+\frac{\eta}{2}y+\frac{1}{6}y^2}$$

La ceteraj esprimoj fariĝas

(18) $$\begin{cases} f = 1-\frac{1}{2}y^2,\ sg = y+\frac{1}{2}\eta y^2,\quad r_t = r(1+\eta y+\frac{1}{2}y^2) \\ f' = -\frac{r}{r_t}sy,\qquad g' = 1-\frac{1}{2}\frac{r}{r_t}y^2 \end{cases}$$

La moviĝo estas facile kalkulebla en ĉiuj pozicioj, se la orbito estas vera parabolo. Sed nenio ĝenas la kalkuladon, laŭ la jam trovitaj ĝeneralaj formuloj, kiam la orbito estas preskaŭparabola, eĉ nenia maleblaĵo okazas kiam la orbito oscilas de elipsa al hiperbola (kaj inverse) - pro ajnaj perturboj en la moviĝo!

Por la kazo e>1, oni havas a<o, pro kio la argumento $\xi^2=y^2r/a$ en la funkcioj c_1, c_2, c_3 estas negativa kaj iliaj serioj estas serioj kun nur poziti-

vaj membroj. La konverĝo estas ne tiom rapida kiel kun $y^2>o$, sed la serioj tamen konverĝas sufiĉe rapide, pro la faktorialoj, senkonsidere kiom granda estas ξ^2. En la direkto de la periastra vektoro $\vec{e}$, oni havas la minimumon de r_t, kalkulotan el (1,18), pere de

$$a\zeta\sin\xi + \eta\sqrt{ar_o}\cos\xi = o$$

$$\zeta\cdot yc_1 + \eta c_o = o$$

(19)
$$y = -\frac{\eta c_o}{\zeta c_1}$$

2.1. Serioj por f kaj g

Pli ofta uzado de la Lagrange-koeficientoj f,g instigis multajn aŭtorojn serĉi pli konvenajn formojn por kalkuli f,g. Oni kalkulas ilin aŭ kiel fermitajn esprimojn aŭ kiel seriojn. La unuan fermitan esprimon donis Kühnert(1879), sed nur lasttempe oni revenas al tia formo (precipe per la menciitaj verkoj de K. Stumpff (1947,1959), kies modifo (la plej praktika, laŭ mia opinio) estas donita sur la antaŭaj paĝoj. Sed ankaŭ la seria formo ne estas malofta. Krom Popoviĉ (1956), ni menciu ankoraŭ V.R.Bond (1966), kiel ekzemplon de la serioj laŭ la potencoj de $t-t_o$. La koeficientoj de ĉi tiuj potencoj estas tro komplikaj, pro la dependeco je tri variablaj parametroj. Pro la ĝenerale nesufiĉa atento al la publikaĵoj de malgrandaj popoloj, oni ne rimarkis la eblecon, donitan ĉe Popoviĉ (1956), por dependigi la koeficientojn de *nur du variablaj parametroj.*

Pro tio mi reprenu la problemon pri la seriigo de f,g, laŭ la sama vojo donita en 1956., sed en iom modifita formo.

Por eviti nulajn indeksojn, metu kiel en (3)

(20)
$$\vec{r}_t = f\vec{r} + g\vec{v}$$

La seriigo Maklorena donas

(21)
$$\vec{r}_t = \sum_{k=o}^{\infty} \vec{r}^{(k)} \cdot \frac{(t-t_o)^k}{k!}$$

Kiel en (1,21), metu

(22)
$$\mu r^{-3} = s^2, \quad (\vec{r}\vec{v})/\sqrt{\mu r} = \eta\,, \quad \mu^{-1} r\vec{v}^2 - 1 = \zeta$$

Tiam

(23)
$$s' = -\frac{3}{2}s^2\eta\,, \qquad \eta' = s(\zeta - \tfrac{1}{2}\eta^2), \qquad \zeta' = s\eta(\zeta-1)$$

La utiligo de la moviĝ'ekvacio

$$\vec{r}^{(2)} = -\mu r^{-3}\vec{r}$$

ebligas esprimon de $\vec{r}^{(k)}$ kiel la linea kombinaĵo de $\vec{r}$ kaj $\vec{v}$. Por disigi la du partojn, ni signu

(24)
$$\vec{r}^{(k)} = s^k f_k \vec{r} + s^{k-1} g_k \vec{v}$$

La derivado donas

$$\vec{r}^{(k+1)} = \left[ks^{k-1}(-\tfrac{3}{2}s^2\eta)f_k + s^k f_k' - s^{k-1}g_k \cdot s^2\right]\vec{r} +$$
$$+ \left[s^k f_k + (k-1)s^{k-2} \cdot (-\tfrac{3}{2}s^2\eta)g_k + s^{k-1}g_k'\right]\vec{v} ,$$

el kio sekvas

$$\text{(25)} \qquad \begin{cases} f_{k+1} = s^{-1}f_k' - \tfrac{3}{2}k\eta f_k - g_k \\ g_{k+1} = s^{-1}g_k' + f_k - \tfrac{3}{2}(k-1)\eta g_k \end{cases}$$

Kun utiligo de (23) oni vidas ke

$$\text{(26)} \qquad \begin{cases} s^{-1}f_k' = \dfrac{\partial f_k}{\partial \eta}(\zeta - \tfrac{1}{2}\eta^2) - \dfrac{\partial f_k}{\partial \zeta}\eta(1-\zeta) \\ s^{-1}g_k' = \dfrac{\partial g_k}{\partial \eta}(\zeta - \tfrac{1}{2}\eta^2) - \dfrac{\partial g_k}{\partial \zeta}\eta(1-\zeta) \end{cases}$$

kaj tiel oni konfirmas la sendependecon (de f_{k+1}, g_{k+1}) de la parametro s, kio estas vidata jam el la esprimoj donitaj ĉe Popoviĉ (1956).

Tiel oni akiris la seriojn

$$\text{(27)} \qquad \vec{r}_t = \vec{r}\sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot \frac{\varepsilon^k}{k!} + \frac{\vec{v}}{s}\sum_{k=0}^{\infty} g_k \cdot \frac{\varepsilon^k}{k!} , \qquad \varepsilon = s(t-t_o)$$

Kun la sinsekvaj esprimoj (25) kaj kun la evidentaj

$$\text{(28a)} \qquad f_o = 1, \quad g_o = o; \quad f_1 = o, \quad g_1 = 1$$

oni facile trovas ĉiujn koeficientojn f_k, g_k. Ni esprimu kelkajn unuajn:

$$\text{(28)} \qquad f_2 = -1,\ g_2 = o;\ f_3 = 3\eta,\ g_3 = -1\ ;\ f_4 = 1+3\zeta-15\eta^2,\quad g_4 = 6\eta$$

$$f_5 = -15\eta(1+3\zeta)+1o5\eta^3, \quad g_5 = 1+9\zeta-45\eta^2;$$

$$f_6 = -(1+24\zeta+45\zeta^2)+210\eta^2(1+3\zeta)-945\eta^4$$

$$g_6 = -30\eta(1+6\zeta)+4.3.5.7\eta^3$$

$$f_7 = 63\eta(1+14\zeta+25\zeta^2)-3150\eta^3(1+3\zeta)+3.5.7.9.11\eta^5$$

$$g_7 = -(1+54\zeta+225\zeta^2)+630\eta^2(1+5\zeta)-5.3.5.7.9.\eta^4$$

Rimarkinte ke ĉi tiuj esprimoj havas regulecon en la potencoj de η^2, oni povas pliprecizigi la sinsekvaĵojn (25) jene:

$$\text{(29)} \qquad \left.\begin{cases} f_k = \eta^{k-2}P_{k,k-2}(\zeta) + \eta^{k-4}P_{k,k-4} + \cdot \\ g_k = \eta^{k-3}Q_{k,k-3}(\zeta) + \eta^{k-5}G_{k,k-5} + \cdot\cdot \end{cases}\right\} \begin{matrix} f_o = 1, \quad f_1 = o, \quad f_2 = -1 \\ k \geq 3; \quad g_o = o,\ g_1 = 1,\ g_2 = o \end{matrix}$$

Enigo de ĉi tiuj esprimoj en (25),(26) kaj egaligo de la samaj potencoj de η donas la sinsekvajojn

$$(30a)\quad Q_{k+1,k-2j}=P_{k,k-2j}-(2k-2-j)Q_{k,k-1-2j}-(1-\zeta)Q'_{k,k-1-2j}+$$
$$+(k+1-2j)\zeta Q_{k,k+1-2j};\quad j=1,2,\ldots.\left[k/2\right];\quad Q_{3,o}=-1$$

$$(30b)\quad P_{k+1,k+1-2j}=-Q_{k,k+1-2j}-(2k-j)P_{k,k-2j}-(1-\zeta)P_{k,k-2j}+$$
$$+(k+2-2j)\zeta P_{k,k+2-2j};\quad j=1,2\ldots\left[\frac{k+1}{2}\right];\quad P_{2,o}=-1;\quad P_{3,1}=3$$

Ĉiuj P kaj Q estas evidente polinomoj nur de la variablo ζ.

Laŭ ĉio tio, (25) kaj (26), aŭ (29) kun (30a) kaj (30b), plene determinas la novan astropozicion

$$(31)\qquad \vec{r}_t=f\vec{r}+g\vec{v}\,,\quad f=\sum_{k=o}^{\infty}f_k\cdot\frac{\varepsilon^k}{k!}\,,\quad g=r\sqrt{\frac{r}{\mu}}\sum_{k=o}^{\infty}g_k\cdot\frac{\varepsilon^k}{k!}\,,\quad \varepsilon=\frac{\sqrt{\mu}}{r\sqrt{r}}(t-t_o)$$

La unua solvo estas pli praktika por la koeficientoj de malalta rango kaj la dua pli praktika por grandaj k. Sed ambaŭ montras klare ke la kalkulado de la serioj por f,g, dependas de nur du parametroj, en la dua solvo tiu dependeco estas eĉ apartigita al du dependecoj je nur unu parametro.

Fine ni rimarku ke ĉiuj paraj f_k kaj ĉiuj neparaj g_k enhavas la unuajn membrojn (sendependaj de η,ζ,), kiuj kune donas $\cos\varepsilon$ en f kaj $r\sqrt{\frac{r}{\mu}}\sin\varepsilon$ en g, kio respegulas la cirklan moviĝon. Oni povas kunigi tiujn membrojn kaj en (31) havi

$$(31a)\qquad f=\cos\varepsilon+\sum_{k=3}^{\infty}\left(f_k-\cos\frac{k\pi}{2}\right)\frac{\varepsilon^k}{k!}\,,\quad g=r\sqrt{\frac{r}{\mu}}\left[\sin\varepsilon+\sum_{k=4}^{\infty}\left(g_k-\sin\frac{k\pi}{2}\right)\frac{\varepsilon^k}{k!}\right.$$

Sed ĉi tiel utilas kalkuli nur se oni havas ne tro ekscentrajn elipsojn (ĉar tiam la membroj kun $\cos\varepsilon$, $\sin\varepsilon$, multege superas la aliajn), eĉ tiam estas malgranda utilo se oni kalkulas per elektrona kalkulilo (ĉar ĝi kalkulas ankaŭ cos kaj sin en la seria formo - kial do fari duspecajn seriojn!).

3. ORBIT'DETERMINO EL 3 OBSERVOJ

Se oni havas je dispono 3 observojn de astro, kun la unuovektoroj $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$ (en momentoj t_1, t_2, t_3), tiam estas plej konvene preni kiel orbitelementojn la pozicion kaj la rapidon de la meza observo ($\vec{r}_2$, $\vec{v}_2$) - pro la pli simpla skribado, signu ilin ($\vec{r}$, $\vec{v}$) - kaj determini ilin el la kondiĉoj:

$$(1)\qquad \begin{aligned} -\vec{R}_1+\varrho_1\vec{E}_1&=\vec{r}_1=f_1\vec{r}+g_1\vec{v}\\ -\vec{R}_2+\varrho_2\vec{E}_2&=\vec{r}\\ -\vec{R}_3+\varrho_3\vec{E}_3&=\vec{r}_3=f_3\vec{r}+g_3\vec{v}\end{aligned}$$

kie $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, $\vec{R}_3$ estas la lokocentraj pozicivektoroj de la Suno, kaj ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 la lokocentraj distancoj de la observita astro ("lokocentraj" signifas rilataj al la observoloko). La nekonatoj ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, $\vec{v}$. Post la elimino de $\vec{v}$, restas la t.n. *geometria kondiĉo* por determino de la orbito

$$n_1(-\vec{R}_1+\rho_1\vec{E}_1) + n_3(-\vec{R}_3+\rho_3\vec{E}_3) = \vec{r} = -\vec{R}_2+\rho_2\vec{E}_2 \tag{2}$$

$$n_1=g_3/g\ ,\quad n_3=-g_1/g\ ,\quad g=f_1g_3-f_3g_1 \tag{3}$$

Trovi la distancojn ρ el ĉi tiu ekvacio (kun sufiĉe proksimume konataj n_1, n_3) estas plej facile uzante skalaran multiplikon per $\vec{E}_1\times\vec{E}_2, \vec{E}_2\times\vec{E}_3, \vec{E}_1\times\vec{E}_3$. Sed ĉi tiu solvovojo estas nerekomendinda, ĉar ĉe ĉiuj nekonatoj aperas en la denominatoro la miksa produto $\vec{E}_1\vec{E}_2\vec{E}_3$, kiu kvanto estas tre ofte tro malgranda, pro kio tre malaltiĝas la kalkul'precizeco (la kalkuloj estas eĉ neeblaj, kiam ĝi estas nulo aŭ preskaŭ nulo). Tamen estas montrita, ekz. Andoyer (1917), Popoviĉ (1969b), ke oni povas determini la orbiton ankaŭ kiam ĉi tiu miksa produto estas nulo - kondiĉe ke la astro ne moviĝas ĝuste en la ekliptikebeno (por ĉi tiu kazo estas bezonataj 4 observoj kaj momente ni flankenlasu ĉi tiun orbitdeterminon).

Por eviti nekonvenaĵon de etaj denominatoroj, Kustaanheimo (1960) uzis kombinaĵojn de la unuovektoroj, tiajn ke almenaŭ du nekonatojn oni esprimu senĝene per la tria (por kiu oni devus uzi alian vojon). Post tio Popoviĉ (1969a) enkondukis similajn simetriajn kombinaĵojn, nome

$$\vec{E}\times\vec{E}_1,\quad \vec{E}_3\times\vec{E}\ :\qquad \vec{E} = (\vec{E}_1\times\vec{E}_3)/(\vec{E}_1\times\vec{E}_3)^2 \tag{4}$$

La skalara multipliko per ĉi tiuj vektoroj donas

$$\begin{cases} n_1\rho_1 = A_0\rho_2+\alpha \\ n_3\rho_3 = C_0\rho_2+\gamma \end{cases}\qquad \alpha = n_1A_1+n_3A_3-A_2,\qquad \gamma = n_1C_1+n_3C_3-C_2 \tag{5}$$

$$A_0=\vec{E}_2\vec{E}_3\vec{E}\ ,\quad C_0=\vec{E}_1\vec{E}_2\vec{E}\ ,\quad A_i=\vec{R}_i\vec{E}_3\vec{E},\quad C_i=\vec{E}\vec{E}_1\vec{R}_i\ ,\quad i=1,2,3. \tag{6}$$

Por akiri ekvacion donontan ρ_2, plej nature estus projekcii (2) al la direkto de $\vec{E}$ (donita per (4)), el kio sekvus

$$-n_1B_1'-n_3B_3' = -B_2'-\rho_2C$$

$$\rho_2C = n_1B_1' + n_3B_3' - B_2' \tag{7}$$

$$B_i' = \vec{R}_i\vec{E}\quad (i=1,2,3)\ ,\quad C = -\vec{E}_2\vec{E} = (\vec{E}_1\vec{E}_2\vec{E}_3)/(\vec{E}_1\times\vec{E}_3)^2 \tag{8}$$

La ekvacio (7) povas servi por determini ρ_2 nur tiam kiam C ne estas nulo (nek preskaŭ nulo). Pro tio oni devas serĉi alian vojon, kiu ebligadus trovi la solvon ankaŭ tiam kiam $C\approx 0$.

La dua parto de la egalaĵo (2) donas

$$r^2 = \vec{R}_2^2 - 2\rho_2(\vec{R}_2\cdot\vec{E}_2) + \rho_2^2$$

$$\rho_2 = (\vec{R}_2\cdot\vec{E}_2) + \sqrt{(\vec{R}_2\cdot\vec{E}_2)^2+r^2-\vec{R}_2^2}$$

(9) $\quad \rho_2 = p_2 + \sqrt{r^2-p}\ , \quad p_2=\vec{R}_2\cdot\vec{E}_2, \quad p=(\vec{R}_2\times\vec{E}_2)^2$

Kunigo de (7) kaj (9) donas

$$\rho_2 = \frac{p_2+\sqrt{r^2-p} +1000(n_1B_1'+n_3B_3'-B_2')}{1+1000C} \tag{10}$$

Kunigo estas necesa, ĉar (7) ne konvenas por etaj C kaj (9) ne ĉiam konvenas ĉar la eraro en la antaŭa ρ_2 transiras, pere de r_1,r,r_3, al la nova ρ_2 preskaŭ plene. La faktoro 1000 estas elektita pro tio ĉar la valoro de C malpli ol 10^{-3} estas konsiderata kiel la eta. Pli grandaj C ne ĝenas la kalkulojn kaj malpligrandaj C (eĉ ĝis nulo) plirapidigas la konverĝon de (10), per ĉeesto de la parenteza sumato (kiu same alproksimiĝas al nulo kiam C estas eta) nur se oni jam atingis sufiĉe altan precizecon.

Tamen ĉi tiu vojo estas tro artefarita kaj oni ne vidas sufiĉe certe la konverĝon en ĉiuj kazoj. Projekciado de (1) je la direkto $\vec{R}_1\times\vec{R}_3$, kiel montris Popoviĉ (1969b) donas nenion efektive pli bonan ol je la direkto $\vec{E}_1\times\vec{E}_3$. Sed fruktodona montriĝis la projekciado je la direkto de

$$n_1\vec{r}_1\times n_3\vec{r}_3 = (-n_1\vec{R}_1+\alpha\vec{E}_1+A_0\rho_2\vec{E}_1)\times(-n_3\vec{R}_3+\gamma\vec{E}_3+C_0\rho_2\vec{E}_3) =$$

$$= \vec{U}_1 + A_0C_0\rho_2^2\vec{E}_1\times\vec{E}_3 - \rho_2\vec{U}_2$$

$$\left\{\begin{aligned} \vec{U}_1 &= n_1n_3\vec{R}_1\times\vec{R}_3-\alpha n_3\vec{E}_1\times\vec{R}_3-\gamma n_1\vec{R}_1\times\vec{E}_3+\alpha\gamma\vec{E}_1\times\vec{E}_3\ , \\ \vec{U}_2 &= A_0n_3\vec{E}_1\times\vec{R}_3+C_0n_1\vec{R}_1\times\vec{E}_3-(A_0\gamma+C_0\alpha)\vec{E}_1\times\vec{E}_3 \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Per tio ekestas la (triagrada por ρ_2) ekvacio

$$-\vec{R}_2\cdot(\vec{U}_1-\rho_2\vec{U}_2+A_0C_0\rho_2^2\vec{E}_1\times\vec{E}_3)+\rho_2\vec{E}_2\cdot(\vec{U}_1-\rho_2\vec{U}_2+A_0C_0\rho_2^2\vec{E}_1\times\vec{E}_3) = 0$$

La libera parto de ĉi tiu ekvacio

$$-\vec{R}_2\cdot\vec{U}_1 = n_1n_3(\vec{R}_1\vec{R}_2\vec{R}_3)-\alpha n_3(\vec{E}_1\vec{R}_2\vec{R}_3)-\gamma n_1(\vec{R}_1\vec{R}_2\vec{R}_3)-\alpha\gamma(\vec{R}_2\vec{E}_1\vec{E}_3)$$

estos preskaŭ nula, ĉar la $\vec{R}$-oj estas en preskaŭ sama ebeno kaj α,γ estas malgrandaj kvantoj, pro (5), des pli malgrandaj ju pli multe progresis la proksimumigado. La sumato kun ρ_2^3 havas la faktoron C, kiu same estas ofte tre malgranda.

Pro ĉio tio oni povas dividi la lastan ekvacion per ρ_2 kaj post tio trakti ĝin kiel la linean, do

$$-(\vec{R}_2\cdot\vec{U}_1)/\rho_2+(\vec{R}_2\cdot\vec{U}_2+\vec{E}_2\cdot\vec{U}_1)-\rho_2\left[\vec{E}_2\cdot\vec{U}_2+A_0C_0(\vec{R}_2\vec{E}_1\vec{E}_3)\right]-\rho_2^2A_0C_0B_0=0$$

aŭ

$$\rho_2 = \frac{\alpha_1+\beta_1/\rho_2}{\alpha_2+\beta_2/\rho_2} \tag{12}$$

$$(13)\quad \begin{cases} \alpha_1 = n_1n_3(\vec{E}_2\vec{R}_1\vec{R}_3)+\alpha n_3(\vec{E}_1\vec{E}_2\vec{R}_3)+\gamma n_1(\vec{R}_1\vec{E}_2\vec{E}_3)-A_0n_3(\vec{E}_1\vec{R}_2\vec{R}_3)- \\ \qquad -C_0n_1(R_1R_2E_3)-B_2(A_0\gamma+C_0\alpha)-\alpha\gamma B_0 \\ \beta_2 = A_0C_0B_0 \\ \beta_1 = n_1n_3(\vec{R}_1\vec{R}_2\vec{R}_3)-\alpha n_3(\vec{E}_1\vec{R}_2\vec{R}_3)-\gamma n_1(\vec{R}_1\vec{R}_2\vec{E}_3)-\alpha\gamma(\vec{R}_2\vec{E}_1\vec{E}_3) \\ \alpha_2 = A_0C_0(\vec{R}_2\vec{E}_1\vec{E}_3)-A_0n_3(\vec{E}_1\vec{E}_2\vec{R}_3)-C_0n_1(\vec{R}_1\vec{E}_2\vec{E}_3)+B_0(A_0\gamma+C_0\alpha) \end{cases}$$

Ĉi tie, dum la transiro al la sekvanta proksimumig'ŝtupo, ŝanĝiĝas nur n_1, n_3, kaj kun ili ankaŭ α,γ el (5), pro kio oni povas kun kiel ajn trovitaj n_1, n_3, elkalkuli ρ_2, tiam ρ_1, ρ_3 el (5) kaj transiri al ajna procedo por pliprecizigo de n_1, n_3 ktp.

La prepar'doñojn, krom tiujn el (6), oni povas havi en la formo

$$(14)\quad \begin{cases} D_0= (\vec{R}_1\vec{R}_2\vec{R}_3),\ D_1= (\vec{E}_1\vec{R}_2\vec{R}_3),\ D_2= (\vec{E}_2\vec{R}_1\vec{R}_3),\ D_3= (\vec{R}_1\vec{R}_2\vec{E}_3) \\ B_0= (\vec{E}_1\vec{E}_2\vec{E}_3),\ B_1= (\vec{R}_1\vec{E}_2\vec{E}_3),\ B_2= (\vec{R}_2\vec{E}_1\vec{E}_3),\ B_3= (\vec{R}_3\vec{E}_1\vec{E}_2) \end{cases}$$

Tiam (13) fariĝas

$$(13a)\quad \begin{cases} \alpha_1= n_1n_3D_2-A_0n_3D_1-C_0n_1D_3+\gamma n_1B_1+\alpha n_3B_3-B_2(A_0\gamma+C_0\alpha)-\alpha\gamma B_0 \\ \alpha_2= A_0C_0B_2-A_0n_3B_3-C_0n_1B_1+(A_0\gamma+C_0\alpha)B_0 \\ \beta_1= n_1n_3D_0-\alpha n_3D_1-\gamma n_1D_3-\alpha\gamma B_2\ , \qquad \beta_2= A_0B_0C_0 \end{cases}$$

La problemo pri ĝenerala metodo por orbitdetermino de planedetoj kaj kometoj estas per ĉi tio plene solvita, ĉar la kalkulprocedo ne dependas de tio ĉu C=o (resp.C≈o). Nur kiam la moviĝo okazas vere en la ekliptika ebeno, tiam nuliĝas ĉiuj membroj ĉe la skalara multipliko de (2) per $\vec{r}_1\times\vec{r}_3$ kaj neeblas determini ρ_2. Sed tiam certe ne sufiĉas tri observoj (kaj pri la utiligo de 4 observoj ni vidu aparte).

Kiam ρ_2 estas trovita el (12) kaj (13a), tiam (5) donas ρ_1, ρ_3 kaj el (2) kaj (3):

$$(15)\qquad \vec{r}_i= -\vec{R}_i+\rho_i\vec{E}_i,\qquad i=1,3$$

$$(16)\qquad \vec{r}= \frac{g_3\vec{r}_1-g_1\vec{r}_3}{g} = n_1\vec{r}_1+n_3\vec{r}_3,\qquad \vec{v} = \frac{f_1\vec{r}_3-f_3\vec{r}_1}{g}$$

Restas ankoraŭ nur la problemo kion preni kiel la ekirajn valorojn por $\vec{r}$, $\vec{v}$, respektive kiujn proksimumajn valorojn preni por f_1, f_3, g_1, g_3 en (16). Estus plej rapide se oni prenus - laŭ la serioj (2,31): $f_1=1, f_3=1, g_1=\sqrt{\mu}(t_1-t_2)$, $g_3=\sqrt{\mu}(t_3-t_2)$. Sed oni povas havi pli precizajn valorojn, ebligantajn tuj dekomence pli ĝustajn $\vec{r}$, $\vec{v}$. Pro tio ni ekiru de iu meza grando de ρ_2 (aŭ de r_2), ekz. ronde $r^3=30$ (kio signifas proksimume $r=3,1$; $r^2=9,6$).

El ĉi tiu valoro kaj el (2,22) ni havas $s^2=\mu/30$ kaj el (1,20b), (2,1), (2,2) oni havas proksimume

$$(17)\qquad y=s\tau,\quad f=1-3\mu_0\tau^2,\quad g=\tau-\mu_0\tau^3,\quad \tau=\sqrt{\mu}(t-t_2),\quad \mu_0=\mu/180$$

Ĉar estas jam prenita t_2 kiel la ekira momento, ni signu

$$(18)\qquad \tau_1=\sqrt{\mu}(t_1-t_2),\quad \tau_3=\sqrt{\mu}(t_3-t_2),\qquad \tau_2=\tau_3-\tau_1$$

(3) fariĝas proksimume

$$n_1=\frac{\tau_3-\mu_0\tau_3^3}{(1-3\mu_0\tau_1^2)(\tau_3-\mu_0\tau_3^3)-(1-3\mu_0\tau_3^2)(\tau_1-\mu\tau_1^3)^2}$$

$$n_3=\frac{-\tau_1+\mu_0\tau_1^3}{\tau_3-\tau_1+3\mu_0\tau_1\tau_3(\tau_3-\tau_1)+\mu_0(\tau_1^3-\tau_3^3)}$$

$$(19)\qquad n_1^0=\frac{\tau_3}{\tau_2}\cdot\frac{1-\mu_0\tau_3^2}{1-\mu_0\tau_2^2},\quad n_3^0=\frac{-\tau_1}{\tau_2}\cdot\frac{1-\mu_0\tau_1^2}{1-\mu_0\tau_2^2}$$

Kun la signaĵoj (6) kaj kun la utiligo de (5), (15), el (16) kaj (9) oni havas

$$(20)\qquad \vec{r}=-\vec{R}_2+\varrho_2^0\vec{E}_2$$

$$(21)\qquad \vec{v}=\frac{(1-3\mu_0\tau_3^2)\vec{\rho}_1-(1-3\mu_0\tau_1^2)\vec{\rho}_3}{\tau_2(1-\mu_0\tau_2^2)}-\frac{1-3\mu_0\tau_3^2}{\tau_3(1-\mu_0\tau_3^2)}(n_1^0A_1+n_3^0A_3-A_2+\varrho_2^0A_0)\vec{E}_1-$$
$$-\frac{1-3\mu_0\tau_1^2}{\tau_1(1-\mu_0\tau_1^2)}(n_1^0C_1+n_3^0C_3-C_2+\varrho_2^0C_0)\vec{E}_3$$

$$(22)\qquad \varrho_2^0=p_2+\sqrt{9{,}6-p},\qquad p_2=\vec{R}_2\cdot\vec{E}_2,\qquad p=(\vec{R}_2\times\vec{E}_2)^2$$

La lastaj du frakcioj en la esprimo por $\vec{v}$ estas tre malgrandaj kompare kun la unua, sed ili estas uzendaj por iom korekti la neprecizecon de la unua frakcjo.

Ĉi tio povas esti la ekiraj valoroj, kalkuleblaj tuj kun la prepardonoj kaj ebligantaj pluajn proksimumigojn, laŭ la sekvanta skemo:

La observodonoj: $\quad t_i,\ \vec{E}_i,\ \vec{R}_i\quad (i=1,2,3)\qquad \vec{E}=(\vec{E}_1\times\vec{E}_3):(\vec{E}_1\times\vec{E}_3)^2$

$$\tau_1=\sqrt{\mu}(t_1-t_2),\quad \tau_3=\sqrt{\mu}(t_3-t_2),\quad \tau_2=\sqrt{\mu}(t_3-t_1)\equiv\tau_3-\tau_1$$

La prepardonoj:

$$(23)\qquad \begin{cases} A_0=\vec{E}_2\vec{E}_3\vec{E},\quad C_0=\vec{E}_1\vec{E}_2\vec{E},\quad C=-\vec{E}_2\vec{E},\quad B_k,D_k\ (k=0,1,2,3)\ \text{el}\ (4)\\ A_i=\vec{R}_i\vec{E}_3\vec{E},\quad C_i=\vec{R}_i\vec{E}\vec{E}_1\quad (i=1,2,3)\\ p_2=\vec{R}_2\cdot\vec{E}_2,\quad p=(\vec{R}_2\times\vec{E}_2)^2,\quad \varrho_2^0=p_2+\sqrt{9{,}6-p} \end{cases}$$

$$(24)\qquad \begin{cases} f_1^0=1-3\mu_0\tau_1^2,\ f_3^0=1-3\mu_0\tau_3^2,\quad g_i^0=\tau_i(1-\mu_0\tau_i^2),\ (i=1,2,3,\ \mu=\mu/180)\\ n_1^0=g_3^0/g_2^0,\quad n_3^0=-g_1^0/g_2^0,\quad \alpha_0=n_1^0A_1+n_3^0A_3-A_2,\quad \gamma_0=n_1^0C_1+n_3^0C_3-C_2 \end{cases}$$

$$(25)\quad \begin{cases} \vec{r} = -\vec{R}_2+\rho_2^0\vec{E}_2 \\ \vec{v} = (f_3^0\vec{R}_1-f_1^0\vec{R}_3):g_2^0-(\alpha_0+\rho_2^0A_0)(f_3^0/g_3^0)\vec{E}_1-(\gamma_0+\rho_2^0C_0)(f_1^0/g_1^0)\vec{E}_3 \end{cases}$$

Iteracia procedo:

$$(26)\quad s^2 = \mu r^{-3}, \quad \eta = \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{\sqrt{\mu r}}, \quad \zeta = r\cdot\frac{\vec{v}^2}{\mu} - 1$$

$$(27)\quad \begin{cases} \varepsilon_i=s(t_i-t_2)+(Ab)s(\rho_i-\rho_2), \quad (Ab)=0{,}000\ 099\ 39 \\ y_i=\varepsilon_i:(1+\eta y_ic_2+\zeta y_i^2c_3), \quad \xi_i^2=y_i^2(1-\zeta), \quad c_2=\frac{1}{2}-\frac{\xi^2}{4!}+\frac{\xi^4}{6!}-\frac{\xi^6}{8!}+\dots \\ f_i=1-y_i^2c_2^{(i)}, \quad sg_i=\varepsilon_i-y_i^3c_3^{(i)} \qquad c_3=\frac{1}{3!}-\frac{\xi^2}{5!}+\frac{\xi^4}{7!}-\frac{\xi^6}{9!}+\dots \\ sg=f_1(sg_3)-f_3(sg_1), \quad n_1=\frac{sg_3}{sg}, \quad n_3=-\frac{sg_1}{sg} \end{cases}$$

$$(28)\quad \begin{cases} \alpha=n_1A_1+n_3A_3-A_2, \quad \gamma=n_1C_1+n_3C_3-C_2, \quad \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \text{el (13a)}, \\ \rho_2=\dfrac{\alpha_1+\beta_1/\rho_2}{\alpha_2+\beta_2\cdot\rho_2}, \quad \rho_1=(A_0\rho_2+\alpha):n_1, \quad \rho_3=(C_0\rho_2+\gamma):n_3 \end{cases}$$

$$(29)\quad \vec{r}_i = -\vec{R}_i+\rho_i\vec{E}_i \qquad (i = 1,3)$$

$$(30)\quad \begin{cases} \vec{r}= n_1\vec{r}_1+n_3\vec{r}_3 \\ \vec{v}=(f_1\vec{r}_3-f_3\vec{r}_1):g \end{cases}$$

kaj post tio ripetadi nur la iteracian proceдon.

Ni menciu ke en ε_i (27) estas prenita aldona membro por konsideri la aberacian influon. La aberacia konstanto (Ab) dependas de la elekto de la mezurunuoj, same kiel $\mu=k^2(M+m)$. En ĉi tiu membro perdiĝas la elekto de la tempounuo, same kiel en la ĉefa membro de ε. Oni kutime prenas tian elekton ke $\mu=1$; nur pro la ĝeneraleco estas retenita μ tra la tuta monografio, sed influo de μ en ĉi tiu skemo perdiĝas tra la prenitaj formoj de η, ζ kaj de ε_i.

La donita metodo estas iom pli komplika ol kelkaj aliaj orbit'determinaj metodoj, sed ĝi estas tute ĝenerala+). La sola escepto estas la kazo de la ekliptik'ebena moviĝo kaj ni pritraktu ĝin tuj.

+) Inter multegaj tiaj metodoj mi konas ankoraŭ nur unu ĝeneralan: Kustaannheimo (1960), sed la praktiko ĝin ĝis hodiaŭ ne akceptis - ĉu pro la aparteneco al malgranda popolo ĉu pro tio ke la iteracia procedo estas iom pli longa (kaj oni devas ripeti ĝin pli multe ol en la supra metodo, pro la tre ĝeneralaj ekiraj valoroj $f=1$, $g=t_2-t_1$).

3.1. La orbit'determino el 4 observoj

Ekiru de la Lagrange-aj esprimoj

(31) $$\vec{r}_i = f_i\vec{r} + g_i\vec{v} \qquad (i=1,2,3)$$

kie $\vec{r}$, $\vec{v}$ estas la pozicio kaj rapido en la kvara observo-momento (oni povas egalrajte preni alian momenton, sed la lasta estas plej konvena por tio ke la orbit'elementoj estu plu proksimaj al la estontaj observoj). Kiam la moviĝo okazas en la ekliptika ebeno, tiam ĉiu el la ekvacioj povus esti anstataŭata per nur du skalaraj ekvacioj, do el tri vektoraj ekvacioj oni povas trovi nur 6 skalarajn nekonatojn, kaj en (31) ili estas 7 (ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 kaj po 2 en $\vec{r}$, $\vec{v}$). Nur se $\vec{r}$, $\vec{v}$ apartenas al novprenota, la kvara, observo, tiam $\vec{r}$ esprimiĝas per la nova nekonato ϱ_4 kaj oni havas nur 6 nekonatojn. Do en la kazo de la ekliptik'ebena moviĝo nepre necesas 4 observoj por trovi la orbiton.

El ĉiuj tri ekvacioj ni eliminu $\vec{r}$, $\vec{v}$, krom tio ni prenu $\vec{v}$ el la dua ekvacio kaj enigu ĝin en la trian; ekestos du ekvacioj:

(32) $$\begin{cases} \vec{r}_2 = n_1\vec{r}_1 + n_3\vec{r}_3 \\ \vec{r}_3 = n_2\vec{r}_2 + n_4\vec{r}_4 \end{cases}$$

(33) $$n_2 = \frac{g_3}{g_2}\,, \quad n_1 = \frac{f_2g_3 - f_3g_2}{f_1g_3 - f_3g_1}\,, \quad n_3 = \frac{f_1g_2 - f_2g_1}{f_1g_3 - f_3g_1}\,, \quad n_4 = f_3 - n_2f_2$$

Konsiderante ke

(34) $$\vec{r}_i = -\vec{R}_i + \varrho_i\vec{E}_i\,, \qquad i=1,2,3,4,$$

kaj multiplikante la unuan ekvacion (32) per $\vec{E}_3\times\vec{E}$, resp. $\vec{E}\times\vec{E}_1$, la duan per $\vec{E}_4\times\vec{E}'$, resp. $\vec{E}'\times\vec{E}_2$, kie

(35) $$\vec{E} = (\vec{E}_1\times\vec{E}_3):(\vec{E}_1\times\vec{E}_3)^2\,, \quad E' = (\vec{E}_2\times\vec{E}_4):(\vec{E}_2\times\vec{E}_4)^2$$

oni trovos

(36) $$\begin{cases} n_1\varrho_1 = \alpha + A_o\varrho_2\,, & \alpha = n_1A_1 + n_3A_3 - A_2 \\ n_3\varrho_3 = \gamma + C_o\varrho_2\,, & \gamma = n_1C_1 + n_3C_3 - C_2 \\ n_2\varrho_2 = \beta + B_o\varrho_3\,, & \beta = n_2B_2 + n_4B_4 - B_3 \\ n_4\varrho_4 = \delta + D_o\varrho_3\,, & \delta = n_2D_2 + n_4D_4 - D_3 \end{cases}$$

kun la signaĵoj

(37) $$A_o = \vec{E}_2\vec{E}_3\vec{E}, \quad B_o = \vec{E}_3\vec{E}_4\vec{E}', \quad C_o = \vec{E}_1\vec{E}_2\vec{E}, \quad D_o = \vec{E}_2\vec{E}_3\vec{E}'$$

(38) $$A_i = \vec{R}_i\vec{E}_3\vec{E}\,, \quad C_i = \vec{R}_i\vec{E}\vec{E}_1\,, \qquad i=1,2,3$$

(39) $$B_j = \vec{R}_j\vec{E}_4\vec{E}', \quad D_j = \vec{R}_j\vec{E}'\vec{E}_2, \qquad j=2,3,4$$

El la dua kaj la tria ekvacioj oni havas tuj la solvon

(40) $\qquad \varrho_2 = \dfrac{B_0\gamma+n_3\beta}{n_2n_3-B_0C_0}, \qquad \varrho_3 = \dfrac{C_0\beta+n_2\gamma}{n_2n_3-B_0C_0}$

kaj tiam la aliaj du nekonatoj sekvas el la aliaj du ekvacioj, nome

(41) $\qquad \varrho_1 = (A_0\varrho_2+\alpha):n_1, \qquad \varrho_4 = (D_0\varrho_3+\delta):n_4$

Restas por determini nur la komencajn valorojn por f_i, g_i $(i=1,2,3)$ kaj tion ni jam faris en la ĝenerala metodo:

(42) $\qquad (f_i)_0 = 1-3\mu_0\tau_i^2\ ,\ (g_i)_0 = \tau_i(1-\mu_0\tau_i^2).\quad \mu_c = \mu/180$

$\tau_i = \sqrt{\mu}(t_i-t_4) + 0{,}000\,099\,39(\varrho_i-\varrho_4)$

Laŭ ĉio tio oni havas (por la determino de orbit'elementoj en la ekliptik'ebeno aŭ tre proksime al ĝi) la sekvantan skemon:

La observodonoj: $\quad t_i,\ \vec{E}_i,\ \vec{R}_i\ (i=1,2,3,4)\ ,\quad \tau_i = \sqrt{\mu}(t_i-t_4)$ +/

$\vec{E} = (\vec{E}_1\times\vec{E}_3):(\vec{E}_1\times\vec{E}_3)^2, \quad \vec{E}' = (\vec{E}_2\times\vec{E}_4):(\vec{E}_2\times\vec{E}_4)^2$

La prepardonoj: (37), (38), (39), (42)

Iteracia procedo: $\quad s,\ n,\ \zeta$ el (26)

$\varepsilon_i,\ y_i,\ f_i,\ sg_i\ (i=1,2,3)$ el (27)

$n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4$ el (33) $\qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta$ el (36)

$\varrho_2,\ \varrho_3$ el (40), $\varrho_1,\ \varrho_4$ el (41), $\vec{r}_i(i=1,2,3,4)$ el (34)

kaj fine

$$\vec{r}=\vec{r}_4, \quad \vec{v} = \frac{\vec{r}_1-f_1\vec{r}}{g_1}$$

Post tio denove la iteracia procedo. La unua paŝo de la iteracia procedo ekde f_i, g_i estos kun la nulaj valoroj (42), post tio ĉio laŭ la indikitaj formuloj.

3.2. Kelkaj pensoj pri la problemo de la orbit'determino

Kiam oni determinas la orbiton el 3 observoj, oni devas fakte kontentigi la kondiĉojn (1), kie $\vec{R}_i$, $\vec{E}_i$ estas konataj konstantoj, f_i, g_i konataj funkcioj de $\vec{r}$, $\vec{v}$, kaj nekonatoj estas $\vec{r}$, $\vec{v}$, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3. La elimino de $\vec{r}$, $\vec{v}$ reduk-

+/ Se oni bezonas tre grandan precizecon, oni ĉi tie aldonas la aberacian membron (42), kompreneble post la determino de la unuaj valoroj ϱ_i. La konstanto estas donita kun la astronomia unuo por la distancoj, $M+m=1$ por la masoj (sendepende de la tempunuo). Kutime estas prenata $\sqrt{\mu}=0{,}017\,202\,099$ (la tempo-unuo = 58,132441 tagoj) tas la kondiĉojn je (2), kun la posta eltrovo de $\vec{r},\vec{v}$ laŭ

$$(43)\qquad \begin{cases} g\vec{v} = f_1(-\vec{R}_3+Q_3\vec{E}_3) - f_3(-\vec{R}_1+Q_1\vec{E}_1) \,, \\ g\vec{r} = g_3(-\vec{R}_1+Q_1\vec{E}_1) - g_1(-\vec{R}_3+Q_3\vec{E}_3) \end{cases}$$

La kondiĉo (2) estas konata kiel la "geometria kondiĉo" por orbit'determino el 3 observoj. La solvo dependas multe de tio ĉu la kvanto C, difinita per (8), estas tro aŭ ne tro malgranda. Kiam ĝi ne estas tro malgranda, tiam oni povas diskomponi la geometri'kondiĉan ekvacion (2) je tri nesamplanaj direktoj. La kalkuloj estas plej simplaj se tiuj direktoj estas $\vec{E}_1$, $\vec{E}_3$, $\vec{E}_1\times\vec{E}_3$. Oni evitas malgrandan C - almenaŭ por du distancoj - per utiligo de la direktoj (4). En ambaŭ kazoj el la unua proksimumigo por n_1, n_3 oni trovas la provizorajn elementojn (ĉi tie $\vec{r}$, $\vec{v}$). Pli preciza determino de n_1, n_3 estas fakte plenumo de ne nur geometriaj sed ankaŭ de dinamikaj kondiĉoj, kio estas fonto por la kreo de multnombraj orbitdeterminaj metodoj (el kiuj la ĉitiea estas plej ĝenerala).

La escepto ekzistas nur kiam C estas tro malgranda kvanto, t.e. kiam la tri observitaj pozicioj estas preskaŭ sam'ebenaj kun la observoloko. Se restas kiel la tria direkto $\vec{E}_1\times\vec{E}_3$, tiam por Q_2 oni havas la ekvacion (7), el kiu evidente ne eblas determini Q_2, se $C\approx 0$. En la diskuto ĉu tiam fakte ne eblas determini la orbiton, aŭ oni ne trovis konvenan vojon por krei la trian skalaran ekvacion, plej facilan solvon donos la respondo je la demando: ĉu tiam nur okaze fariĝis

$$n_1B_1' + n_3B_3' - B_2' = 0$$

aŭ ĝi devas esti tia ĉar $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, $\vec{R}_3$ estas en la ebeno perpendikulara je $\vec{E}_1\times\vec{E}_3$. Se tio fariĝis nur okaze, tiam la lasta ekvacio donas la ligon inter n_1, n_3, kiun (per iu konvena vojo) oni povos utiligi por determini ankaŭ Q_2. Anstataŭ ol serĉi konvenan vojon, oni povas serĉi alian direkton anstataŭ $\vec{E}_1\times\vec{E}_3$, en kiu la koeficiento apud Q_2 ne nuliĝos (kiel estis farita en la ĉi tie donita metodo). Sed se samtempe B_1', B_2', B_3' nuliĝas, tiam forfalas ĉiu ebleco por utiligi (7) aŭ iun similan ekvacion, ĉar ĉiuj vektoroj en la kondiĉa ekvacio (2) troviĝas en unu ebeno - ekliptika ebeno (do estas diskomponeblaj je nur du sendependaj direktoj de tiu ebeno).

Mi serĉis ankaŭ aliajn vojojn por konvene esprimi Q_2 kaj ne estas malbone prezenti la ĉefajn gvid'ideojn. Unu el ili estas la solvo (10), kiu povas esti ne rapide konverĝa, sed ĝi tamen estas solvo.

Enigu en (43) la esprimojn kiuj sekvas el (1):

$$(44)\qquad Q_i = (f_i\vec{r} + g_i\vec{v} + \vec{P}_i)\cdot\vec{E}_i \,, \quad i=1,2,3 \ (f_2=1,\ g_2=0)$$

Oni trovas esprimojn por $g\vec{r}$, $g\vec{v}$ dependaj de provizore elektotaj $\vec{r},\vec{v}$. La ĉefa membro en la esprimo por $\vec{v}$ preskaŭ ne dependas (almenaŭ ne linee) de la prenitaj $\vec{r}$, $\vec{v}$. Sed la ĉefa parto de $\vec{r}$ dependas linee de la malnova $\vec{r}$, pro kio la konverĝo povas esti tro malrapida.

En la esprimoj (1), kiuj devus doni la nekonatojn Q_1, Q_2, Q_3, oni povas trakti nur unu el la vektoroj $\vec{r}$, $\vec{v}$ kiel la provizore konatan kaj la alian kiel nekonaton - ni ĵus vidis ke tiam la solvo (44) ne konvenas, se $\vec{r}$ estus prenita kiel la konata. Pro tio traktu unue $\vec{r}$ kiel nekonaton kaj eliminu ĝin provizore el (1). El la du restantaj ekvacioj oni povas trovi, per skalara multipliko je $\vec{E}_1\times\vec{E}$, $\vec{E}_3\times\vec{E}$ kaj ambaŭ je $\vec{E}_2\times\vec{E}$:

$$(45)\qquad \begin{cases} f_1\varrho_2(\vec{E}_1\vec{E}_2\vec{E}) = (f_1\vec{R}_2-\vec{R}_1+g_1\vec{v})\cdot(\vec{E}\times\vec{E}_1) \\[2ex] f_3\varrho_2(\vec{E}_2\vec{E}_3\vec{E}) = (f_3\vec{R}_2-\vec{R}_3+g_3\vec{v})\cdot(\vec{E}_3\times\vec{E}) \end{cases} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{E}_1\times\vec{E}_3}{(\vec{E}_1\times\vec{E}_3)^2}$$

$$(46)\qquad \begin{cases} \varrho_1(\vec{E}_1\vec{E}_2\vec{E}) = (\vec{R}_1-f_1\vec{R}_2+g_1\vec{v})\cdot(\vec{E}_2\times\vec{E}) \\[2ex] \varrho_3(\vec{E}_2\vec{E}_3\vec{E}) = (\vec{R}_3-f_3\vec{R}_2+g_3\vec{v})\cdot(\vec{E}\times\vec{E}_2) \end{cases}$$

Por ĉi tio estos bezonataj provizoraj valoroj de f_1, f_3, g_1, g_3, $\vec{v}$, kiujn oni povas preni el (17) kaj (21). Fine la meza ϱ_2 el (45) donas nekonatan $\vec{r}$. Post tio oni ripetu (45), (46) kun nova $\vec{v}$ prenata el (16), kaj kun f_i, g_i laŭ la konataj esprimoj (25), (26) ktp. La malfacilaĵo estas la skalara multipliko de la ŝanĝiĝa vektoro $\vec{v}$ per tri konstantaj vektoroj, sed la ideo mem ne estas forĵetinda.

La lasta valora kombinaĵo por havi vojon por kontentigi la kondiĉojn (1) konsistas en la pritrakto de $\vec{r}$ jam dekomence kiel konatan kvanton-vektoron (t.e. ekiri de unu konata ϱ_2). Sed tiam la egalaĵoj (5) montras ke ϱ_1, ϱ_3 transprenas la eraron el ϱ_2, pro kio la solvo (15), (16) por $\vec{r}$ estos tre erara, do la iteracia procedo estos tro malrapide konverĝa. La eliro el ĉio tio estos trovi alian esprimon por ϱ_2, sendependan de la trovita $\vec{r}$. Kaj ĝuste tion donas la ekvacio (12)! La ĉefa avantaĝo estas ke oni fakte utiligas nur ϱ_2 el la antaŭa paŝo de la iteracia procedo - por trovi $\vec{r}$; por trovi $\vec{v}$ oni utiligas plurajn aliajn kvantojn, sed - laŭ (16) - ili nemulte influas novan valoron de $\vec{v}$.

4. KOREKTO DE LA ORBITO SURBAZE DE 2 AŬ 3 OBSERVOJ

Kiam, ekirinte de la jam konataj $\vec{r}$, $\vec{v}$ (por la donita momento t_0), oni kalkulis la efemeridojn de planedeto (kometo) kaj la aliaj observoj ne plene kongruas kun la efemeridoj, ni devas korekti la elementojn $\vec{r}$, $\vec{v}$.

Prenu unue ke oni havas je dispono nur du plurajn finindajn observojn. Por ne ŝanĝi la signaĵojn poste (kiam ni pritraktos la kazon de tri observoj), signu la observojn, la lokocentrajn poziciojn de la Suno, la lokocentrajn distancojn kaj la observodirektojn per

$$(1)\qquad t_i,\ \vec{R}_i,\ \varrho_i,\ \vec{E}_i\ , \qquad i=1,3$$

Tiam la elementoj $\vec{r}$, $\vec{v}$ devas plenumi la kondiĉojn

$$(2)\qquad -\vec{R}_i + \varrho_i\vec{E}_i = \vec{r}_i = f_i\vec{r} + g_i\vec{v}\ , \qquad i = 1,3.$$

De tie tuj la esprimoj

$$\rho_i = (f_i\vec{r} + g_i\vec{v} + \vec{R}_i)\cdot\vec{E}_i$$

$$g = f_1 g_3 - f_3 g_1$$

$$g\,\vec{r} = g_3\vec{r}_1 - g_1\vec{r}_3 = g_1\vec{R}_3 - g_3\vec{R}_1 + \vec{E}_1\cdot(\vec{r}_1+\vec{R}_1)g_3\vec{E}_1 - \vec{E}_3\cdot(\vec{r}_3+\vec{R}_3)g_1\vec{E}_3 =$$
$$= g_1\left[\vec{E}_3\times(\vec{R}_3\times\vec{E}_3)\right] - g_3\left[\vec{E}_1\times(\vec{R}_1\times\vec{E}_1)\right] + g_3(\vec{E}_1\cdot\vec{r}_1)\vec{E}_1 - g_1(\vec{E}_3\cdot\vec{r}_3)\,\vec{E}_3$$

$$g\,\vec{v} = f_1\vec{r}_3 - f_3\vec{r}_1 = f_3\vec{R}_1 - f_1\vec{R}_3 + \vec{E}_3\cdot(\vec{r}_3+\vec{R}_3)f_1\vec{E}_3 - \vec{E}_1\cdot(\vec{r}_1+\vec{R}_1)f_3\vec{E}_1 =$$
$$= f_3\left[\vec{E}_1\times(\vec{R}_1\times\vec{E}_1)\right] - f_1\left[\vec{E}_3\times(\vec{R}_3\times\vec{E}_3)\right] + f_1(\vec{E}_3\cdot\vec{r}_3)\vec{E}_3 - f_3(\vec{E}_1\cdot\vec{r}_1)\vec{E}_1$$

Se ni do enkondukos la signaĵojn

$$(3)\qquad \begin{cases} \vec{E}_i\times(\vec{R}_i\times\vec{E}_i) = \vec{R}_i - (\vec{R}_i\cdot\vec{E}_i)\vec{E}_i = \vec{R}_i' \\ (\vec{E}_i\cdot\vec{r}_i)\vec{E}_i = \vec{E}_i' \quad , \quad i=1,3 \end{cases}$$

la novajn valorojn $\vec{r}$, $\vec{v}$ ni havos el

$$(4)\qquad \begin{cases} g\vec{r} = g_1(\vec{R}_3'-\vec{E}_3') - g_3(\vec{R}_1'-\vec{E}_1') \\ g\vec{v} = f_3(\vec{R}_1'-\vec{E}_1') - f_1(\vec{R}_3'-\vec{E}_3') \ , \quad g = f_1g_3 - f_3g_1 \end{cases}$$

ĉe kio f_i, g_i oni kalkulas laŭ la esprimo el la efemeridkalkulo, post tio la aliajn vektorojn el (3), prenite $\vec{r}_i = f_i\vec{r} + g_i\vec{v}$ (kun la antaŭaj valoroj $\vec{r},\vec{v}$).

Oni povas ripeti la procedon ĝis sufiĉa kongruo inter la antaŭaj kaj novaj valoroj $\vec{r}$, $\vec{v}$.

Se oni devas fari la korekton de la elementoj surbaze de tri konvenaj observoj, tiam la ekvacioj (2) devas esti kontentigotaj ankaŭ por i = 2. Elimino de la nekonatoj $\vec{r}$, $\vec{v}$, donas la "geometrian kondiĉon" por la ekzisto de la orbito:

$$(5)\qquad (-\vec{R}_1+\rho_1\vec{E}_1)g_{23} + (-\vec{R}_2+\rho_2\vec{E}_2)g_{31} + (-\vec{R}_3\rho_3\vec{E}_3)g_{12} = o$$

(respektive $\vec{r}_2 = n_1\vec{r}_1 + n_3\vec{r}_3$)

$$(6)\qquad g_{ij} = f_ig_j - f_jg_i \ , \qquad n_1 = \frac{g_{23}}{g_{13}}$$

El ĉi tio oni povas, *en la neesceptaj kazoj*, facile trovi ρ_1, ρ_2, ρ_3 kaj tuj post tio

$$(7)\qquad \begin{aligned} g_{13}\vec{r} &= g_1\vec{R}_3 - g_3\vec{R}_1 + g_3\rho_1\vec{E}_1 - g_1\rho_3\vec{E}_3 \\ g_{13}\vec{v} &= -\,f_1\vec{R}_3 + f_3\vec{R}_1 + f_1\rho_3\vec{E}_3 - f_3\rho_1\vec{E}_1 \end{aligned}$$

Sed por enigi ankaŭ ĉiujn enigeblajn kazojn, ni utiligu la ekvaciojn (5) en tri specialaj direktoj (3,4) t.e.

$$\vec{E}\times\vec{E}_1, \quad \vec{E}_3\times\vec{E}, \quad \vec{E} \quad - \quad \vec{E} = \frac{\vec{E}_1\times\vec{E}_3}{(\vec{E}_1\times\vec{E}_3)^2}$$

Tiam ϱ_1, ϱ_3 esprimiĝas kiel (3.5), t.e.

$$(8)\qquad \begin{cases} n_1\varrho_1 = n_1A_1+n_3A_3-A_2+A_0\varrho_2, & A_i = \vec{R}_i\vec{E}_3\vec{E}, \quad A_0 = \vec{E}_2\vec{E}_3\vec{E} \\ n_3\varrho_3 = n_1C_1+n_3C_3-C_2+C_0\varrho_2, & C_i = \vec{R}_i\vec{E}\,\vec{E}_1, \quad C_0 = \vec{E}_1\vec{E}_2\vec{E} \end{cases}$$

Kaj por trovi ϱ_2 oni povas utiligi la mezan observon, en la formo (2), t.e.

$$(9)\qquad \varrho_2 = \vec{r}_2\cdot\vec{E}_2 + \vec{R}_2\cdot\vec{E}_2$$

Nur ĉi tie (krom por kalkulado de f_i, g_i) ni utiligas la antaŭajn elementojn $\vec{r}$, $\vec{v}$; post tio venas ϱ_1, ϱ_3 el (8) kaj novaj $\vec{r}$, $\vec{v}$ el (7).

Ĉi tiu procedo por korekti la orbitelementojn havas nur kelkajn formulojn, sed tamen ĝi postulas longan kalkuladon de ĉiuj koeficientoj f_i, g_i. Sed oni devas konsideri la fakton ke ni jam havas iajn elementojn kaj ke ni bezonas nur korekti ilin, kio ĉiukaze grave plisimpligos la kalkulojn.

+

\+ +

Prenu ke la efemeridojn ni kalkulis surbaze de la konata meza observo. Verdire tio okazos neniam, sed ni devas fari la postkalkulon tiel ke ni trovos $\vec{r}_2 = f_2\vec{r} + g_2\vec{v}$, $\vec{v} = f_2'\vec{r} + g_2'\vec{v}$, ni alkomodigos ĝin je la konata observo-direkto $\vec{E}_2$, preninte

$$\vec{r}_2 = -\vec{R}_2+\vec{E}_2\cdot(f_2\vec{r}+g_2\vec{v}+\vec{R}_2)\vec{E}_2$$

Ekire de tiaj elementoj (ni signu ilin denove, kiel antaŭe, per $\vec{r}$, $\vec{v}$, sed nun por la momento t_2), ni kalkulos

$$\vec{r}_i = f_i\vec{r} + g_i\vec{v}\ , \qquad i=1,3$$

Prenu ke la korektoj de la elementoj estu

$\Delta\vec{r} = \Delta\varrho\cdot\vec{E}_2$ kaj $\Delta\vec{v}$, el kio sekvos rapide iuj korektoj Δf_i, Δg_i, kaj nur post tio la trovitaj valoroj kontentigus la ekvaciojn (1), do

$$-\vec{R}_i+\varrho_i\vec{E}_i = (f_i+\Delta f_i)(\vec{r}+\Delta\varrho\cdot\vec{E}_2)+(g_i+\Delta g_i)(\vec{v}+\Delta\vec{v})$$

Ĉar la antaŭaj kalkuloj donas $\varrho_i\vec{E}_i$ kiuj ne kongruas kun la observoj, signu

$$f_i\vec{r}+g_i\vec{v} = -\vec{R}_i+\varrho_i^k\vec{E}_i^k\ , \quad \varrho_i-\varrho_i^k=\Delta\varrho_i\ , \quad \vec{E}_i-\vec{E}_i^k = \Delta\vec{E}_i$$

kaj ni havos (neglektante la produtojn de la korektoj):

$$(10)\qquad \varrho_i\vec{E}_i-\varrho_i^k\vec{E}_i^k \approx \varrho_i\Delta\vec{E}_i+\Delta\varrho_i\vec{E}_i = \Delta f_i\vec{r}+f_i\Delta\varrho\vec{E}_2+\Delta g_i\vec{v}+g_i\Delta\vec{v}, \quad i=1,3$$

Ĉi tio estas du vektoraj ekvacioj, en kiuj la nekonatoj estas $\Delta\vec{v}$, $\Delta\varrho$, $\Delta\varrho_1$, $\Delta\varrho_3$. Unue eliminu $\Delta\vec{v}$, kio donos

$$(11)\qquad g_3\varrho_1\Delta\vec{E}_1-g_1\varrho_3\Delta\vec{E}_3 = (g_3\Delta f_1-g_1\Delta f_3)\vec{r}+ (g_3\Delta g_1-g_1\Delta g_3)\vec{v}+$$

$$+ g\Delta\varrho\vec{E}_2 - g_3\Delta\varrho_1\vec{E}_1 + g_1\Delta\varrho_3\vec{E}_3$$

La esprimojn $\varrho_i\Delta\vec{E}_i$ ni havos el la komparo de la kalkulataj valoroj kun la observaj:

$$(12)\qquad \varrho_i\Delta\vec{E}_i = \varrho_i^k\vec{E}_i - \varrho_i^k\vec{E}_i^k + \Delta\varrho_i\cdot\Delta\vec{E}_i \approx \varrho_i^k\vec{E}_i - (f_i\vec{r} + g_i\vec{v} + \vec{R}_i) =$$
$$= \vec{E}_i\cdot(f_i\vec{r} + g_i\vec{v} + \vec{R}_i)\vec{E}_i - (f_i\vec{r} + g_i\vec{v} + \vec{R}_i) = \left[(f_i\vec{r} + g_i\vec{v} + \vec{P}_i)\times\vec{E}_i\right]\times\vec{E}_i$$

Laŭ ĉi tio, restas ankoraŭ esprimi Δf_1, Δf_3, Δg_1, Δg_3, depende de la nekonataj korektoj.

Konsideru unue ke la anomalio y, dividita per s, laŭ (1,20a), dependas ĉefe de tempo, pro kio la malgrandajn ŝanĝojn $\Delta\varrho$, $\Delta\vec{v}$, sekvos negletendaj ŝanĝoj en y/s. El (2,2a) kaj (1,21) ni trovas

$$(13)\qquad \Delta g \approx -\left(\frac{y}{s}\right)^3 c_3\cdot\Delta(s^2) = -s^{-2}(t-g)\mu(-3r^{-4})\Delta r = 3(t-g)\frac{\Delta r}{r},$$

se tempo estas kalkulata ekde t_0. Pro tio sufiĉe bona proksimumo estas

$$g_3\Delta g_1 - g_1\Delta g_3 = 3\frac{\Delta r}{r}(g_3t_1 - g_3g_1 - g_1t_3 + g_1g_3) = 3\frac{\Delta r}{r}(g_3t_1 - g_1t_3) =$$
$$= 3\frac{\Delta r}{r}(t_3t_1 - y_3^3c_3t_1/s - t_1t_3 + y_1^3c_3t_3/s) = 3\frac{\Delta r}{rs}(y_1^3c_3t_3 - y_3^3c_3t_1)$$

kaj oni vidas ke oni povas en (11) eĉ neglekti ĉi tiun kvanton, (ĉar t_1, t_3, sekve ankaŭ y_1, y_3, havas la kontraŭajn antaŭsignojn).

Ni havas pluen

$$(14)\qquad \Delta f \approx -\left(\frac{y}{s}\right)^2 c_2\cdot\Delta(s^2) = 3y^2c_2\cdot\frac{\Delta r}{r} = 3(1-f)\frac{\Delta r}{r}$$

Se ni konsideros ankoraŭ ke el $r^2 = (\varrho - \vec{R}\cdot\vec{E})^2 + (\vec{R}\times\vec{E})^2$ sekvas $\Delta r \approx \Delta\varrho$, ni havos

$$g_3\Delta f_1 - g_1\Delta f_3 = 3\frac{\Delta\varrho}{r}(g_3 - f_1g_3 - g_1 + g_1f_3) = 3\frac{\Delta\varrho}{r}(g_3 - g_1 - g)$$

Tiel la supra ekvacio (11) prenas la formon

$$(15)\qquad \left[\vec{E}_2 + \frac{3(g_3-g_1-g)}{g}\frac{\vec{r}}{r}\right]g\Delta\varrho - g_3\vec{E}_1\Delta\varrho_1 + g_1\vec{E}_3\Delta\varrho_3 = g_3\varrho_1\Delta\vec{E}_1 - g_1\varrho_3\Delta\vec{E}_3$$

aŭ pli mallonge

$$(15a)\qquad \vec{E}_2^{*}g\cdot\Delta\varrho - \vec{E}_1g_3\cdot\Delta\varrho_1 + g_1\vec{E}_3\cdot\Delta\varrho_3 = \vec{\delta}(\vec{E}_1\vec{E}_3\vec{E}_2^{*}),$$
$$\vec{E}_2^{*} = \vec{E}_2 + 3\frac{g_3-g_1-g}{g}\frac{\vec{r}}{r} \qquad \vec{\delta} = \frac{g_3\varrho_1\Delta\vec{E}_1 - g_1\varrho_3\Delta\vec{E}_3}{\vec{E}_1\vec{E}_3\vec{E}_2}$$

La solvoj sekvas tuj el ĝi

$$(16)\qquad \Delta\varrho = \frac{\vec{\delta}\vec{E}_1\vec{E}_3}{g}, \quad \Delta\varrho_1 = \frac{\vec{\delta}\vec{E}_2\vec{E}_3}{g_3}, \quad \Delta\varrho_3 = \frac{\vec{\delta}\vec{E}_1\vec{E}_2}{-g_1}$$

Fine ni devas trovi $\Delta\vec{v}$ el unu el la ekvacioj (10), aŭ pli bone kombininte ilin tiel ke ni trovu plej eble ĝustan $\Delta\vec{v}$, aŭ ke ni plifaciligu la kalkulojn. Estus malpli da kalkuloj se ni eliminus la membrojn kun $\vec{E}_2\Delta\varrho$ (ĉar nur ilin oni povas plene elimini). Sed la supraj esprimoj por $\Delta f, \Delta g$ montras ke per tia procedo ni nenion profitas koncerne la aliajn koeficientojn, kompare kun la simpla substraho de ĉi tiuj ekvacioj. Aliflanke $g_3-g_1>g$ $[\equiv f_1g_3-f_3g_1]$, ĉar $g_3>o$, $g_1<o$, pro kio estas plej simple trovi $\Delta\vec{v}$ el

$$(g_3-g_1)\Delta\vec{v} = (\varrho_3\Delta\vec{E}_3-\varrho_1\Delta\vec{E}_1)+\vec{E}_3\Delta\varrho_3-\vec{E}_1\Delta\varrho_1-(f_3-f_1)\vec{E}_2\Delta\varrho-(\Delta f_3-\Delta f_1)\vec{r}-(\Delta g_3-\Delta g_1)\vec{v}$$

Pro la jam trovitaj proksimumigoj (13) kaj (14) oni havos pluen

$$(g_3-g_1)\Delta\vec{v}= (\varrho_3\Delta\vec{E}_3-\varrho_1\Delta\vec{E}_1)+\vec{E}_3\Delta\varrho_3-\vec{E}_1\Delta\varrho_1-(f_3-f_1)(\vec{E}_2-3\frac{\vec{r}}{r})\Delta\varrho + +3(g_3-g_1-t_3+t_1)\frac{\vec{v}}{r}\Delta\varrho$$

kaj fine

$$(17)\qquad (g_3-g_1)\Delta\vec{v} = (\varrho_3\Delta\vec{E}_3-\varrho_1\Delta\vec{E}_1)+(\vec{E}_3\Delta\varrho_3-\vec{E}_1\Delta\varrho_1)+\left[3\frac{\vec{r}_3-\vec{r}_1-(t_3-t_1)\vec{v}}{r} - -(f_3-f_1)\vec{E}_2\right]\Delta\varrho$$

Laŭ ĉio tio, la kompleta procedo por korekti la elementojn $\vec{r},\vec{v}$ (enla meza observomomento t_2) de la orbito, surbaze de la direkto-devioj ĉe du aliaj observoj, estus:

$$\vec{r}_1= f_1\vec{r}+g_1\vec{v},\quad \vec{r}_3= f_3\vec{r}+g_3\vec{v},\quad g= f_1g_3-f_3g_1$$

$$(\varrho_i\Delta\vec{E}_i)= (\vec{E}_i\cdot\vec{r}_i)\vec{E}_i-\vec{r}_i+(\vec{R}_i\times\vec{E}_i)\times\vec{E}_i \equiv \vec{E}_i\cdot(\vec{r}_i+\vec{R}_i)\vec{E}_i-\vec{r}_i-\vec{R}_i \equiv$$

$$= \left[(\vec{r}_i+\vec{R}_i)\times\vec{E}_i\right]\times\vec{E}_i\ , \qquad i=1,3.$$

$$(18)\quad \vec{E}_2^{*} = \vec{E}_2+3\frac{g_3-g_1-g}{g}\frac{\vec{r}}{r}\ ,\qquad \vec{\delta} = \frac{g_3(\varrho_1\Delta\vec{E}_1)-g_1(\varrho_3\Delta\vec{E}_3)}{\vec{E}_2^{*}\vec{E}_1\vec{E}_3}$$

$$\Delta\varrho= \frac{\vec{\delta}\vec{E}_1\vec{E}_3}{g}\ ,\qquad \Delta\varrho_1= \frac{\vec{\delta}\vec{E}_2^{*}\vec{E}_3}{g_3}\ ,\qquad \Delta\varrho_3= \frac{\vec{\delta}\vec{E}_2^{*}\vec{E}_1}{g_1}$$

$$(g_3-g_1)\Delta\vec{v}= (\varrho_3\Delta\vec{E}_3)-(\varrho_1\Delta\vec{E}_1)+\vec{E}_3\Delta\varrho_3-\vec{E}_1\Delta\varrho_1+\left[3\frac{\vec{r}_3-\vec{r}_1-(t_3-t_1)\vec{v}}{r} - (f_3-f_1)\vec{E}_2\right]\Delta\varrho$$

La trovitaj korektoj $\vec{E}_2\Delta\varrho$ kaj $\Delta\vec{v}$ estas aldonendaj je $\vec{r},\vec{v}$, kaj tiel oni havas la novajn elementojn, kun kiuj oni povas ripeti la kalkulojn (pro eventuala nova korekto - iam necesa pro la faritaj proksimumigoj, ĉiukaze pro la kontrolo! - precipe kiam la komencaj devioj estas ne tre malgrandaj). La procedo ja estas simpla same laŭ la formuloj kiel laŭ la nelongeco de la kalkuloj, do ripetinda ĝis atingo ke la elementoj $\vec{r},\vec{v}$ plene kontentigu la du aliajn observojn.

5. ORBIT'ELEMENTOJ EL PLURAJ OBSERVOJ

Plej ofte oni havas je dispono pli ol tri observojn de la novtrovita planedeto aŭ kometo. Oni utiligas tamen nur 3 observojn por determini unuajn orbit'elementojn (kaj oni korektas ilin poste tiel ke ili plejeble bone kontentigu ĉiujn observojn). Ĉu oni povas tuj, ĉe la unua eltrovado de la orbitelementoj, iri al la utiligo de ĉiuj (sufiĉe fidindaj) observoj? La koncernaj rezultatoj de Popoviĉ (1970) montras ke ĉio tio eblas, utiligonte nur la provizorajn elementojn (determinotaj jam en la prepar'kalkuloj, dum la preparado de la koncernaj kvantoj, necesaj por la posta iteracia procedo por eltrovo de la orbitelementoj). La procedo estas aplikebla same por kometoj kiel por planedetoj.

Ni prenu ke oni havas n observodirektojn $\vec{E}_i$, en la momentoj t_i $(i = 1,2,\ldots,n)$. Se oni havus la elementojn $\vec{r},\vec{v}$ en la ekira momento t_o, oni povus kalkuli la suncentrajn poziciojn $\vec{r}_i$, laŭ la punkto 2. de ĉi tiu verko. Estas tute nature ke, pro diversaj kialoj, ne ĉiuj kalkulataj pozicioj kongruas kun la observaj pozicioj. Oni devas trovi tiajn elementojn ke la donitaj observoj kongruu kiom eble plej bone kun la kalkulataj, tio signifas apliki *la principon de la minimuma kvadratsumo*. Sed, en la apliko de ĉi tiu principo, oni iam ne tre zorgas kiu estas la natura kvanto kies devioj devas havi la minimuman kvadratsumon - v. Popoviĉ (1958). La naturaj devioj ĉi tie estas la ortaj distancoj ek de la kalkulataj lokocentraj pozicioj ĝis la observodirektoj. Oni trovos ĉi tiujn distancojn kiel la diferencojn inter la lokocentra pozicivektoro de planedeto (laŭ la kalkulo) kaj ĝia projekcio al la observodirekto (lokocentra), t.e.

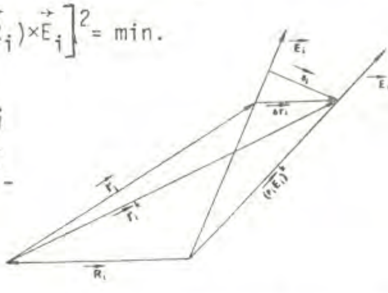
$$(\varrho_i\vec{E}_i)^k-(\varrho_i^k\vec{E}_i^k\cdot\vec{E}_i)\vec{E}_i = \vec{E}_i\times(\varrho_i^k\vec{E}_i^k\times\vec{E}_i) .$$

Do, la principo de la minimuma kvadratsumo postulas tian elekton de la ekiraj pozicio kaj rapido $(\vec{r},\vec{v})$ ke minimuma estu la funkcio

$$U = \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{E}_i\times(\varrho_i^k\vec{E}_i^k\times\vec{E}_i)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}(\varrho_i^k\vec{E}_i^k\times\vec{E}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[(\vec{r}_i+\vec{R}_i)\times\vec{E}_i\right]^2$$

t.e.

(1) $$U = \sum_{i=1}^{n}\left[(f_i\vec{r}+g_i\vec{v}+\vec{R}_i)\times\vec{E}_i\right]^2 = \min.$$



Ĉi tie ankaŭ, la esprimoj f_i, g_i, laŭ (2;1,2), dependas de la nekonataj $\vec{r},\vec{v}$. kaj la minimum'kondiĉo postulas fakte kontentigon de la ekvacioj

(2) $$\frac{\partial U}{\partial\vec{r}} = o, \quad \frac{\partial U}{\partial\vec{v}} = o$$

Ĉi tiujn ekvaciojn ni trovos pli facile senpere el $\delta U=o$, ĉe kio oni devas efektivigi la variadon sen ŝanĝo de la tempo, do dependе nur de $\delta\vec{r}$, $\delta\vec{v}$. Pro tio ni faru unue

$$\tfrac{1}{2}\delta U = \sum \left[(f_i\vec{r}+g_i\vec{v}+\vec{R}_i)\times E_i\right]\cdot\left[\delta(f_i\vec{r}+g_i\vec{v})\times\vec{E}_i\right]$$

(3) $$\tfrac{1}{2}\delta U = \sum \vec{w}_i\cdot\delta(f_i\vec{r}+g_i\vec{v}) = 0\ , \qquad \vec{w}_i = \vec{E}_i\times\left[(f_i\vec{r}+g_i\vec{v}+\vec{R}_i)\times\vec{E}_i\right]$$

Por esprimi δf_i kaj δg_i ni skribu (I;20,21,18) kaj (II;1,2a) en la formoj

(4) $$\begin{cases} u^2\eta(1-\cos\xi)+\zeta u^3(\xi-\sin\xi)+\zeta u = st \\ \eta = \dfrac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{\sqrt{\mu r}}\ , \quad \zeta = r\cdot\vec{v}^2-1, \quad u = (1-\zeta)^{-1/2}, \quad s^2=\mu r^{-3} \\ r/r_0 = 1 + \eta u\sin\xi + \zeta u^2(1-\cos\xi) \equiv L \\ f = 1-u^2(1-\cos\xi)\ , \qquad g = t - \dfrac{u^3}{s}(\xi-\sin\xi) \end{cases}$$

La variigoj donas

(5) $$\left[u^2\eta\sin\xi + \zeta u^3(1-\cos\xi)+u\right]\delta\xi + u^2(1-\cos\xi)\delta\eta+\left[2u\eta(1-\cos\xi)+ +3u^2\zeta(\xi-\sin\xi)+\xi\right]\delta u + u^3(\xi-\sin\xi)\delta\zeta = t\delta s, \qquad \delta s = -\frac{3s}{2r}\delta r$$

(6) $$\delta\eta = \frac{\delta(\vec{r}\cdot\vec{v})}{\sqrt{\mu r}} - \eta\,\frac{\delta r}{2r}\ , \qquad \delta\zeta = \frac{2r}{\mu}(\vec{v}\cdot\delta\vec{v}) + \frac{1+\zeta}{r}\delta r, \qquad \delta u = \frac{1}{2}\,u^3\delta\zeta$$

kaj ĉio kune donas

$$\begin{aligned} uL\delta\xi &= \left[-\frac{3s}{2r}t + \frac{\eta}{2r}u^2(1-\cos\xi) - \frac{1+\zeta}{2r}u^3\xi(1+2\eta yc_2+3\zeta y^2c_3+2-2c_1)\right]\delta r - \\ &\quad -y^2c_2\cdot\frac{\delta(\vec{r}\cdot\vec{v})}{\sqrt{\mu r}} - \frac{r}{\mu}\,u^2y(1+2\eta yc_2+3\zeta y^2c_3+2-2c_1)(\vec{v}\cdot\delta\vec{v}) = \\ &= \left[-3st+sg-yc_1-(1+\zeta)u^2(3st-sg+yc_1-2y+2y-2yc_1)\right]\frac{\delta r}{2r} - \\ &\quad -y^2c_2\frac{\delta(\vec{r}\cdot\vec{v})}{\sqrt{\mu r}} - \frac{rs}{\mu}u^2(3t-g-\frac{yc_1}{s})(\vec{v}\cdot\delta\vec{v}) \end{aligned}$$

(7) $$uL\delta\xi = -(3t-g-\frac{1}{s}yc_1)\frac{s.\delta r}{r(1-\zeta)} = y^2c_2\frac{\delta(\vec{r}\cdot\vec{v})}{\sqrt{\mu r}} - \frac{rs}{\mu(1-\zeta)}\,(3t-g-\,\frac{yc_1}{s})(\vec{v}\cdot\delta\vec{v}) - -(yc_1)\,\frac{\delta r}{r}$$

Post enigo de ĉi tiu esprimo en la variaĵon de la lastaj formuloj (4), oni ricevas:

(8) $$\vec{r}\delta f + \vec{v}\delta g = -u^2(y^2c_2\vec{r} + \frac{3}{2s}y^3c_3\vec{v})\delta\zeta + \frac{3}{2rs}y^3c_3\vec{v}\delta r - \frac{u}{s}(syc_1\vec{r}+y^2c_2\vec{v})\delta\xi$$

ĉe kio la esprimoj (2;4,5) por f',g' donas ke la lasta parentezo estas

$$L(\vec{v}-\vec{v}_i)$$

do

$$\vec{r}\delta f+\vec{v}\delta g = -u^2\left[(1-f)\vec{r}+\frac{3}{2}(t-g)\vec{v}\right]\left[\frac{1+\zeta}{r}\delta r + \frac{2r}{\mu}(\vec{v}\cdot\delta\vec{v})\right] + \frac{3}{2r}(t-g)\vec{v}\cdot\delta r + +(\vec{v}-\vec{v}_i)\left[(3t-g-\frac{1}{s}yc_1)(\vec{v}\cdot\delta\vec{v}+\mu r^{-2}\delta r)\frac{r}{\mu(1-\zeta)}+yc_1\frac{\delta r}{rs} + (1-f)\frac{\delta(\vec{r}\cdot\vec{v})}{s\sqrt{\mu r}}\right]$$

aŭ

$$(9)\qquad \vec{r}\delta f_i + \vec{v}\delta g_i = -\vec{f}_i(\vec{r}\cdot\delta\vec{r}) - g_i(\vec{r}\cdot\delta\vec{v} + \vec{v}\cdot\delta\vec{r}) - \vec{h}_i(\vec{v}\cdot\delta\vec{v})$$

$$(10)\qquad \begin{cases} \vec{f}_i = \mu\vec{r}^{-3}\vec{h}_i + (\mu r)^{-1/2}(yc_1)_i(\vec{v}_i - \vec{v}) + r^{-2}(1-f_i)\vec{r} \\ \vec{g}_i = \frac{r}{\mu}(1-f_i)(\vec{v}_i - \vec{v}) \\ \vec{h}_i = \frac{r}{\mu(1-\zeta)}\left[2(\vec{r}-\vec{r}_i) + \frac{1}{s}(yc_1)_i\vec{v} + (3t_i - g_i - \frac{1}{s}(yc_1)_i)\vec{v}_i\right] \end{cases}$$

Post tio (3) fariĝas

$$\frac{1}{2}\delta U = \sum \vec{w}_i\cdot(f_i\delta\vec{r} + g_i\delta\vec{v}) - \sum \vec{w}_i\cdot\left[\vec{f}_i(\vec{r}\cdot\delta\vec{r}) + \vec{g}_i(\vec{r}\cdot\delta\vec{v} + \vec{v}\cdot\delta\vec{r}) + \vec{h}_i(\vec{v}\cdot\delta\vec{v})\right]$$

Nuligante aparte la derivaĵojn apud $\delta\vec{r}$ kaj apud $\delta\vec{v}$, oni akiras la respektivajn kondiĉajn ekvaciojn

$$(11)\qquad \begin{aligned} (\sum \vec{w}_i\cdot\vec{f}_i)\vec{r} + (\sum \vec{w}_i\cdot\vec{g}_i)\vec{v} &= \sum f_i\vec{w}_i \\ (\sum \vec{w}_i\cdot\vec{g}_i)\vec{r} + (\sum \vec{w}_i\cdot\vec{h}_i)\vec{v} &= \sum g_i\vec{w}_i \end{aligned}$$

kie la kalkulotaj vektoroj estas esprimitaj per (10) kaj (3).

Se oni solvus la ekvaciojn (11) senpere, la solvoj montriĝus tre proksimaj al $\frac{0}{0}$, tuj kiam oni atingus malgrandajn deviojn inter la observoj kaj la kalkuloj. Se oni ne forigus tiun mankon, ĝi tro malfortigus precizecon de la trovotaj orbit'elementoj. Kaj por forigi la mankon, ni transiru al la kalkulado de diferencoj. Nome, post kiam la elementojn $\vec{r}$, $\vec{v}$ ni konos kun iu grado de proksimumigo, la ekvacioj (11) devus doni la elementojn kun unu plia grado. Tion ni indiku tiel ke la ekiraj elementoj estu $\vec{r}_o$, $\vec{v}_o$ kaj la serĉataj elementoj estu $\vec{r}$, $\vec{v}$. Ĉiuj kvantoj, en (11), kun la apudsigno $_i$, dependas de $\vec{r}_o$, $\vec{v}_o$ kaj nur la nekonatoj estas $\vec{r}$, $\vec{v}$.

Tiam ni prenu ke la nekonatoj estas nur la diferencoj $\vec{r}-\vec{r}_o$, $\vec{v}-\vec{v}_o$, t.e. skribu la ekvaciojn (11) en la formo

$$(11a)\qquad \begin{cases} \alpha(\vec{r}-\vec{r}_o) + \beta(\vec{v}-\vec{v}_o) = \alpha_r\vec{r}_o + \alpha_v\vec{v}_o + \alpha_c\vec{c} \\ \beta(\vec{r}-\vec{r}_o) + \gamma(\vec{v}-\vec{v}_o) = \beta_r\vec{r}_o + \beta_v\vec{v}_o + \beta_c\vec{c} \end{cases}$$

$$(11b)\qquad \alpha = \sum \vec{w}_i\cdot\vec{f}_i \;;\quad \beta = \sum \vec{w}_i\cdot\vec{g}_i \;,\quad \gamma = \sum \vec{w}_i\cdot\vec{h}_i$$

$$(11c)\qquad \begin{cases} \alpha_r = c^{-2}\sum f_i(\vec{w}_i\vec{v}_o\vec{c}) - \alpha \;, & \beta_r = c^{-2}\sum g_i(\vec{w}_i\vec{v}_o\vec{c}) - \beta \\ \alpha_v = c^{-2}\sum f_i(\vec{w}_i\vec{c}\vec{r}_o) - \beta \;, & \beta_v = c^{-2}\sum g_i(\vec{w}_i\vec{c}\vec{r}_o) - \gamma \\ \alpha_c = c^{-2}\sum f_i(\vec{w}_i\vec{c}) \;, & \beta_c = c^{-2}\sum g_i(\vec{w}_i\vec{c}) \end{cases}$$

La lastaj esprimoj estas trovitaj per simpla diskompono de la vektoroj

$$(12)\qquad \sum f_i\vec{w}_i - \alpha\vec{r}_o - \beta\vec{v}_o \;,\qquad \sum g_i\vec{w}_i - \beta\vec{r}_o - \gamma\vec{v}_o$$

en la direktojn

(13) $\vec{r}_0, \quad \vec{v}_0, \quad \vec{c}=\vec{r}_0\times\vec{v}_0$

laŭ la ĝenerale valida formulo

(14) $c^2\vec{A}= (\vec{A}\vec{v}_0\vec{c})\vec{r}_0 + (\vec{A}\vec{c}\vec{r}_0)\vec{v}_0 + (\vec{A}\cdot\vec{c})\vec{c}$

Inversigo de la matrico de la sistemo (11) ebligas prezenti tuj la solvon en la formo

(15) $$\begin{bmatrix}\vec{r}-\vec{r}_0\\ \vec{v}-\vec{v}_0\end{bmatrix} = \frac{1}{\Lambda}\begin{bmatrix}\gamma & -\beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_r & \alpha_v & \alpha_c\\ \beta_r & \beta_v & \beta_c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\vec{r}_0\\ \vec{v}_0\\ \vec{c}\end{bmatrix} \qquad \Lambda=\alpha\gamma-\beta^2$$

5.1. Praktika kalkulado de la bezonataj kvantoj

Restas trovi konvenajn, praktikajn, esprimojn por la kvantoj (11b) kaj (11c). Utiliginte la esprimojn el la efemerid'kalkulo kaj la sube enkondukotajn signajojn, oni ekiru de la elementoj $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$, (kiujn ni denove skribu sen la apudsigno, simple $\vec{r},\vec{v}$); oni havos la jenan proceduon:

La antaŭaj konstantoj

I $\quad s = r^{-2}\sqrt{\mu r}, \quad n = \vec{r}.\vec{v}/\sqrt{\mu r}, \quad \zeta = r\cdot\vec{v}^2:\mu-1, \quad a = \frac{r}{1-\zeta}$

La anomalio de la komenco (por ĉiu observo aparte)

II $\quad y = \dfrac{st}{1+nyc_2+\zeta y^2c_3}, \quad m = y^2(1-\zeta), \quad c_1 = 1-\frac{m}{3!}+\frac{m^2}{5!}-\frac{m^3}{7!}+\dots$

$c_0=1-\frac{m}{2!}+\frac{m^2}{4!}-\frac{m^3}{6!}+\dots, \quad c_2=\frac{1}{2!}-\frac{m}{4!}+\frac{m^2}{6!}-\frac{m^3}{8!}+\dots, \quad c_3=\frac{1}{3!}-\frac{m}{5!}+\frac{m^2}{7!}-\frac{m^3}{9!}+\dots$

III $\quad p'=yc_1, \quad p''=y^2c_2, \quad p'''=y^3c_3, \quad f=1-p'', \quad sg=\hat{g}=p'+np''$

IV $\quad L=\frac{r_i}{r}=1+np'+\zeta p'', \quad q''=p':L, \quad q'=p''q'', \quad q=p'q''+p'', \quad p=\frac{p'+2np''+3p'''}{L}$

V $\quad u=pp'-2p'', \quad u'=3p'''-pp'', \quad u''=(p'')^2:L$

VI $\quad \vec{w}=\left[\vec{E}\times(f\vec{r}+g\vec{v}+\vec{R})\right]\times\vec{E}, \quad \delta_r=\vec{w}\cdot\vec{r}, \quad \delta_v=\vec{w}\cdot\vec{v}, \quad \delta_c=(\vec{w}\vec{r}\vec{v})$

(en la esprimo por $\vec{w}$, $\vec{R}$ signifas la lokocentran pozicion de la Suno kaj $\vec{F}$ la lokocentran observodirekton de la planedeto (kometo).

Antaŭ ol doni la formulojn por la koeficientoj (11b), (11c), ni donu al la vektoroj (10) la formojn en kiuj aperas la ĵus indikitaj kvantoj. Unue

(16) $\quad \vec{h}_i=\frac{a}{\mu s}\left[yc_1\vec{v}+(yc_1+2ny^2c_2+3y^3c_3)\vec{v}_i+2s(\vec{r}-\vec{r}_i)\right]=\frac{a}{\mu s}\left[p'\vec{v}+pL(f'\vec{r}+g'\vec{v})+\right.$

$$+2s(p''\vec{r}-g\vec{v})\Big] = \frac{a}{\mu}(2p''-pp')\vec{r} + \frac{a}{\mu s}(p'+pL-pp''-2\hat{g})\vec{v} = \frac{a}{\mu s}(-us\vec{r}+u'\vec{v})$$

$$\vec{g}_i = -\frac{r}{\mu}y^2c_2 \cdot \frac{r}{r_i}(syc_1\vec{r}+y^2c_2\vec{v}) = \frac{-p''}{\sqrt{\mu r}} \cdot \frac{p'}{L}\vec{r} - \frac{r}{\mu} \cdot \frac{(p'')^2}{L}\vec{v}$$

du

Kaj fine $\vec{g}_i = -\frac{r}{\mu}(sq'\vec{r}+u''\vec{v})$

$$\vec{f}_i = \frac{-1}{\sqrt{\mu r}}yc_1 \cdot \frac{r}{r_i}(syc_1\vec{r}+y^2c_2\vec{v}) - \frac{y^2c_2}{r^2}\vec{r} + s^2\vec{h}_i = -\left(\frac{p'}{r^2}q'' + \frac{p''}{r^2}\right)\vec{r} -$$

$$-\frac{q'}{\sqrt{\mu r}}\vec{v} + \frac{sa}{\mu}us\vec{r}-u'\vec{v}) = -\frac{s^2r}{\mu}\left(q+\frac{a}{r}u\right)\vec{r} - \frac{sr}{\mu}\left(q'-\frac{a}{r}u'\right)\vec{v}$$

La sumigoj, farotaj por ĉiuj observoj utiligendaj por la orbitdetermino, donos

$$\text{VII}\begin{cases} Q = \sum q_i\delta_{ri}, \quad Q' = \sum q_i'\delta_{vi}, \quad U = \frac{1}{1-\zeta}\sum u_i\delta_{ri}, \quad U' = \frac{1}{1-\zeta}\sum u_i'\delta_{vi} \\ F = \sum f_i\delta_{ri}, \quad F' = \sum f_i\delta_{vi}, \quad F'' = \sum f_i\delta_{ci}, \quad U'' = \sum u_i''\delta_{ci} \\ G = \sum \hat{g}_i\delta_{ri}, \quad G' = \frac{1}{s}\sum \hat{g}_i\delta_{vi}, \quad G'' = \frac{1}{s}\sum \hat{g}_i\delta_{ci} \end{cases}$$

Kun tiel kalkulitaj sumoj oni havos senpere

$$\text{VIII} \qquad \gamma = \frac{r}{\mu s}(sS-S'), \qquad \beta = \frac{r}{\mu}(sQ'+S''), \qquad \alpha = \frac{sr}{\mu}\Big[s(Q+S)+(Q'-S')\Big]$$

$$\text{IX}\begin{cases} c^2\alpha_c = F'', \quad c^2\alpha_v = r^2F'+(\vec{r}\cdot\vec{v})(-F)-c^2\beta, \quad c^2\alpha_r = \vec{v}^2F-\vec{r}\cdot\vec{v}F'-c^2\alpha \\ c^2\beta_c = G'', \quad c^2\beta_v = r^2G'-(\vec{r}\cdot\vec{v})G-c^2\gamma, \quad c^2\beta_r = \vec{v}^2G-(\vec{r}\cdot\vec{v})G'-c^2\beta \end{cases}$$

Nenio plu estas bezonata por ricevi la korektojn (15). Se la korektitaj elementoj neneglektinde diferencas de la antaŭaj, oni ripetos la proceдон ktp.

5.2. Elekto de la ekiraj orbitelementoj

Por povi kalkuli la solvojn (15), oni bezonas havi la ekirajn valorojn $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$, kiuj servas kiel bazo por kalkuli la "konatajn" kvantojn en la dekstra parto de (15). Ju pli ĝustaj estas tiuj ekiraj elementoj des pli malgrandaj estos la diferencoj $w_0(3)$ (la sumoj $\sum f_i w_i$, $\sum g_i w_i$ estos ankoraŭ pli malgrandaj, ĉar la devioj grandparte inter-nuliĝas), kaj la novajn elementojn ni havos des pli precizajn. Kun la novaj elementoj oni ripetos la proceдон kaj tiel, paŝon post paŝo, ni alvenos al la stato kiam la diferencoj inter la trovitaj kaj la antaŭaj elementoj fariĝos sensignifaj.

La ekirajn, provizorajn, elementojn oni povas preni el 3 plej konvenaj observoj (la jam prenita meza observo kun du aliaj, preskaŭ egale malproksimaj, observoj, por kiuj krome estas ne tro malgranda la triedro C el (3,8)), laŭ la formuloj (3; 19, 20, 21). Se la tuta nombro da observoj estas ne tre granda (diru ni ĝis deko), aŭ se ni kalkulas per rapida elektrona kalkulilo, tiam ni povas kontentiĝi kun eĉ pli neĝustaj valoroj $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$, - kiujn oni povas kalkuli kun malmulta peno (kaj post tio ne gravas se la kalkulmaŝino ripetos pluran fojon la iteracian procedon). Sed se la utiligitaj observoj estas tre multaj, kio signifas ke oni havos longan kalkuladon laŭ la supra (aŭ iu ajn alia) kalkulskemo, tiam gravas ke oni havu la ekirajn elementojn tre ĝustajn (kaj ripeti la iteracian procedon nur malmultfoje).

Kiam sufiĉas eĉ ne tre precizaj valoroj por la ekiraj elementoj, tiam oni povas limiĝi je la unua frakcio por $\vec{v}$, en (3,21), do preni

$$\text{(17)}\qquad \begin{aligned} \vec{r} &= -\vec{R}_2 + (p_2 + \sqrt{9{,}6-p})\vec{E}_2\,, \qquad p_2 = \vec{R}_2\cdot\vec{E}_2, \quad p = (\vec{R}_2\times\vec{E}_2)^2 \\ \vec{v} &= \frac{(1-3\mu_o\tau_3^2)\vec{R}_1-(1-3\mu_o\tau_1^2)\vec{R}_3}{\tau_2(1-\mu_o\tau_2^2)}, \qquad \tau_1=\sqrt{\mu}(t_1-t_2),\ \tau_3=\sqrt{\mu}(t_3-t_2) \\ &\qquad\qquad \tau_2=\tau_3-\tau_1, \quad \mu_o=\frac{\mu}{180}\approx 0{,}0055\mu \end{aligned}$$

aŭ eĉ pli simple

$$\text{(17a)}\qquad \vec{r} = -\vec{R}_2+2\vec{E}_2\,, \qquad \vec{v} = \frac{\vec{R}_1-\vec{R}_3}{\tau_2}$$

Sed kiam oni bezonas tre ĝustajn ekirajn elementojn, tiam en la formuloj (3;19-22) oni devas preni la tutajn esprimojn. Kiam la nombro de la observoj estas tre granda, estus bone eĉ fari kelkajn paŝojn el la iteracia procedo de la p.3 kaj nur kun sufiĉe bonaj $\vec{r}$, $\vec{v}$, eniri en la iteracian procedon donitan en ĉi tiu punkto.

6. ORBITDETERMINO EL PLURAJ KOMPLETAJ OBSERVOJ

Nuntempaj teknikaj rimedoj enportis esencan ŝanĝon en la kolektado de observaj donoj de iuj ĉielkorpoj, kiaj estas la meteoroj kaj la sputnikoj. La esenco kuŝas en la fakto ke oni ne plu bezonas determinadi nur la direkton de la observata astro, sed samtempe oni determinas ankaŭ la (lokocentran) distancon de la astro. Ĉi tiajn observojn oni povas prave nomi *kompletaj observoj*, ĉar oni havas ĉion necesan por scii la lokon en kiu en la donita momento troviĝis la astro.

Kunlige kun ĉi tio, stariĝas tuj la demando kiel utiligi ankaŭ ĉi tiujn donitaĵojn por la orbit'determinado de tiaj objektoj, konsiderante samtempe la fakton ke la ĉi-specia observado estas malpli preciza ol la aliaj, ekzemple fotografia. De si mem estas tuj komprenehle ke por la orbitdetermino el tiaj observoj nepre necesas utiligadi plurajn observojn, laŭeble jam ĉe la eltrovo de la provizora orbito, por eventuale tuj forigi gravajn deviojn inter la reala kaj la kalkulata orbito.

Estu do konataj n pozicivektoroj de la observata objekto:

$$\text{(1)}\qquad \vec{r} = \vec{r}_i \quad \text{por} \quad t=t_i \qquad (i=1,2,3,\ldots,n)$$

La pozicioj ne plu devas esti la lokocentraj (precipe se temas pri la observado el diversaj lokoj), sed oni povas tuj redukti ilin al la komuna centro de la koordinata sistemo (tercentro aŭ suncentro), ĉar oni ja konas ĉiujn distancojn.

Por povi komparadi la kalkulotajn poziciojn kun la pozicioj (1), ni devas unue adopti proksimuman, ekiran, sistemon de orbitelementoj, por kio ni prenos kiel "difinitan momenton" la momenton de unu observo– notu ĝin t_b – proksimume en la mezo de la tuta intervalo t_1, t_n). En tiu momento ni konas la pozicivektoron $\vec{r}_b$, sed ni ne konas la rapidvektoron $\vec{v}_b$. Por trovi proksimuman valoron de $\vec{v}_b$, aldonu al la observo en la momento t_b unu (sufiĉe fidindan) observon kun la momento t_a proksima al t_1 kaj la alian similan en la momento t_c proksima al t_n.

Seriigu $\vec{r}_a$ kaj $\vec{r}_c$ ĉirkaŭ t_b kaj tranĉu la seriojn je la dua grado. Tio nun estos du ekvacioj kun la nekonatoj $d\vec{r}_b/dt$ kaj $d^2\vec{r}_b/(dt)^2$. El ili oni trovas

$$\frac{d\vec{r}_b}{dt} = \frac{(\vec{r}_a-\vec{r}_b)(t_c-t_b)^2-(\vec{r}_c-\vec{r}_b)(t_a-t_b)^2}{(t_a-t_b)(t_c-t_b)(t_c-t_a)}$$

$$(2)\qquad \vec{v}_b = \frac{(t_b-t_a)^2\vec{r}_c+\left[(t_c-t_b)^2-(t_a-t_b)^2\right]\vec{r}_b-(t_c-t_b)^2\vec{r}_a}{(t_b-t_a)(t_c-t_b)(t_c-t_a)}$$

La sistemon $(\vec{r}_b, \vec{v}_b)$ ni prenu por la ekira elementsistemo kaj signu ĝin kiel $(\vec{r}_o, \vec{v}_o)$, eĉ pli simple $(\vec{r},\vec{v})$ se ne estas danĝero de miskomopreno, kaj la respektivan momenton signu kiel t_o.

RIMARKO Serĉante la ekiran sistemon de elementoj, oni povus fari ankaŭ alimaniere, nome el ĉiuj pozicivektoroj $\vec{r}_i$ (1) preni la tranĉitajn seriojn ĝis la grado n kaj el tiu ekvacia sistemo determini $d\vec{r}/dt$. Tio devus sendube esti tre ĝusta valoro de la rapido en la elektita momento. Sed esenca manko de ĉi tiu vojo konsistas en troa eteco de la determinanto de ĉi tiu sistemo - ĝi estas la determinanto de *Vandermonde* (la produto de ĉiuj diferencoj t_k-t_j, $j\neq k$). Iuj el tiuj diferencoj estos eĉ escepte malgrandaj (se oni utiligas ĉiujn observojn), pro kio evidente tuj perdiĝas la menciita avantaĝo.

La adoptitaj vektoroj por la pozicio kaj por la rapido, en la momento notita per t_o, permesas kalkuli la poziciojn kiaj ili povus esti en la momentoj t_i $(i=1,2,\ldots,n)$:

$$(3)\qquad \vec{r}_i^{\,k} = f_i\vec{r} + g_i\vec{v}$$

La diferencoj inter ili kaj la mezure ricevitaj pozicioj de la astro estas la devioj kies kvadratsumo devas esti minimuma:

$$(4)\qquad U = \sum_{i=1}^{n} \vec{w}_i\cdot\vec{w}_i = \min, \qquad \vec{w}_i = f_i\vec{r} + g_i\vec{v} - \vec{r}_i$$

El tio tuj devenas la kondiĉaj ekvacioj tute egalaj al la ekvacioj (5.3), kun la sola diferenco ke la esprimo por $\vec{w}_i$ havas ĉi tie iom alian aspekton, nome (4). La plua pritrakto kaj la ricevitaj esprimoj estas tute identaj kun la esprimoj en la p.5. de ĉi tiu verko, ĉar la aliaj kalkuloj estas sendependaj de $\vec{w}_i$.

Do la solvo de la problemo estas la solvo de la ekvacisistemo (5.11), trovita en la formo (5.15). Restas la sama kalkulskemo I-IX el la punkto 5.1., kun la sola ŝanĝo en VI, kie nun venas

$$\text{VIa}\qquad \vec{w}_i = f_i\vec{r} + g_i\vec{v} - \vec{r}_i$$

7. INFLUO DE LA PERTURBOJ

Se la tempo dum kiu estas kolektitaj la observaj donoj estas iom longa aŭ se dum tiu tempo la observita objekto estis relative multe perturbata (per ajnaspecaj perturboj), oni devus dum la orbitdetermino konsideri ankaŭ la perturbojn. La konsidero de la perturboj estas ja plifaciligita per la novaj formuloj por la Lagrange-koeficientoj de la perturbata moviĝo, trovitaj en la artikolo de Popović (1973.).

Por ne doni nur la formulojn kaj aliflanke ne ripeti la tutan artikolon, donu ĝian mallongan skizon.

Al la vektoraj integraloj de la neperturbata moviĝo oni donas la formon konvenan ankaŭ por la neperturbata moviĝo, nome la moviĝekvacio

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu r^{-3}\vec{r} + \delta.\vec{F} \tag{1}$$

havas la integralojn

$$\vec{c} = \vec{c}_0 + \delta\vec{c}_1, \quad \vec{c}=\vec{r}\times\vec{v}, \quad \vec{c}_0=\vec{r}_0\times\vec{v}_0, \quad \vec{c}_1 = \int_{t_0}^{t} (\vec{r}\times\vec{F})dt \tag{2}$$

$$\vec{e}_0+\delta.\vec{e}_1 = \vec{e} = \vec{v}\times\vec{c} - \mu\vec{r}/r, \quad \vec{e}_1 = \int_{t_0}^{t} \left[\vec{F}\times\vec{c} + \vec{v}\times(\vec{r}\times\vec{F})\right]dt \tag{3}$$

Oni enigas en (2)

$$\begin{cases} \vec{r} = f\vec{r}_0 + g\vec{v}_0 + h\vec{c} \\ \vec{v} = f'\vec{r}_0 + g'\vec{v}_0 + h'\vec{c}_0 \end{cases} \tag{4}$$

kaj la rezultaton oni multiplikas per $\vec{c}_0$, $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$ - sekvas

$$\begin{cases} fg'-f'g = c_0^{-2}(\vec{c}\cdot\vec{c}_0) = 1 + \delta.c_0^{-2}(\vec{c}_0\cdot\vec{c}_1) \\ gh'-g'h = c_0^{-2}(\vec{c}\cdot\vec{r}_0) = \delta.c_0^{-2}(\vec{r}_0\cdot\vec{c}_1) \\ hf'-h'f = c_0^{-2}(\vec{c}\cdot\vec{v}_0) = \delta.c_0^{-2}(\vec{v}_0\cdot\vec{c}_1) \; . \end{cases} \tag{5}$$

El du lastaj, utiligante ankaŭ la unuan, kun etaj transformoj, oni trovas

$$h = -\delta\cdot\frac{\vec{r}\cdot\vec{c}_1}{c_0^2} \;, \qquad h = -\delta\cdot\frac{(f\vec{r}_0+g\vec{v}_0)\cdot\vec{c}_1}{\vec{c}\cdot\vec{c}_0} \tag{6}$$

$$h' = -\delta c_0^{-2}(\vec{v}\cdot\vec{c}_1) = -\delta\cdot(f'\vec{r}_0+g'\vec{v}_0)\cdot\vec{c}_1/(\vec{c}\cdot\vec{c}_0) \tag{7}$$

Multipliko de (3) per $\vec{v}_0$, poste per $\vec{r}_0$, konsiderante (4) donas

$$\begin{cases} c_0^2 f' + \vec{R}\cdot\vec{v}_0 = \delta\cdot(\vec{v}\times\vec{c}_1-\vec{e}_1)\cdot\vec{v}_0 \\ c_0^2(1-g')+\vec{R}\cdot\vec{r}_0 = \delta\cdot(\vec{v}\times\vec{c}_1-\vec{e}_1)\cdot\vec{r}_0 \end{cases} \qquad \vec{R}=\mu\left(\frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{r}_0}{r_0}\right) \tag{8}$$

Per (6), (7) kaj (8) estas donitaj h,h',f',g'; restas nur f,g kaj la neutiligita unua ekvacio (5). Enigo de f',g' el (8) en la unuan (5) donas la ligon inter f,g. El tiu ligo oni esprimas g depende de f kaj per la enkonduko de la nova variablo ξ tiel ke estu

$$(9)\qquad r_0(1-f) = a_0(1-\cos\xi) - \delta r_0 f_1 \ , \quad (\mu/a_0 = 2\mu/r_0 - \vec{v}_0^{\,2})$$

kaj oni determinas f_1 tiel ke ξ eliru elsub la radiko. Post iom da penaj transformoj oni ricevas fine

$$(10)\qquad \begin{cases} f = 1-(1-\cos\xi)a_0/r_0+\delta(\tau_1\cos\xi+\tau_2\sqrt{a_0/r_0}\sin\xi) \\ \mu g = a_0(\vec{r}_0\vec{v}_0)(1-\cos\xi)+r_0\sqrt{\mu a_0}\sin\xi+\delta r_0\sqrt{r_0}(\tau_1\sqrt{a_0/r_0}\sin\xi - \\ \qquad -\tau_2\cos\xi) - \delta r_0(\vec{r}_0\vec{v}_0)(\tau_1\cos\xi+\tau_2\sqrt{a_0/r_0}\sin\xi) \end{cases}$$

$$(11)\qquad \tau_1 = \frac{d}{r_0}\left(1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{e}_0}{c_0^2}\right) \ , \qquad \tau_2^2 = \frac{1}{\mu r_0}\left[d^2c_0^{-2}-(\mu c_0^{-2}\vec{r}\cdot\vec{c}_1)^2\right] - \tau_1^2(1-\xi).$$

$$(12)\qquad d = (\vec{c}_0+\vec{c})\cdot\vec{c}_1-(\vec{r}\cdot\vec{e}_1)$$

Ĉi tio estas farita simile al la vojo el la p.1. de ĉi tiu verko, sed iom pli komplike, pro la ĉeesto de la perturboforto $\delta\vec{F}$ en (1). Simile oni trovas la ĝeneraligitan Kepleran ekvacion, kiu similas al (1.20), aŭ kun la nova variablo

$$(13)\qquad y = \xi\cdot\sqrt{a_0/r_0}$$

kaj kun aliaj signaĵoj el (1.21) kaj (1.22), oni trovas por la perturbata moviĝo

$$(14)\qquad y = \frac{s(t-t_0)+\delta\cdot J}{1+\eta y c_2+\zeta y^2 c_3} \qquad J = \int_{t_0}^{t}\frac{(LT-L'\rho)dy-(r/r_0)d\rho}{L'+\delta T}$$

kie

$$(15)\qquad \begin{cases} \rho = \dfrac{d}{\mu r_0}+\eta(\tau_1 y c_1-\tau_2 c_0)-\zeta(\tau_2 y c_1+\tau_1 c_0) \ , \\ L = 1+\eta y c_1+\zeta y^2 c_2 \ , \quad L' = \zeta y c_1+\eta c_0 . \end{cases}$$

$$(16)\qquad \begin{cases} 2L'\cdot T = 2\rho(\zeta c_0-\eta y c_1)+H_1 r^2:(\mu r_0)-\delta\rho^2(1-\zeta)-\delta T^2 \\ c^2 H_1 = (\vec{e}+\vec{e}_0)\cdot\vec{e}_1+(\mu/a_0)(\vec{c}+\vec{c}_0)\cdot\vec{c}_1 \end{cases}$$

Kun la nova variablo y (10) fariĝas

$$(17)\qquad \begin{cases} f = 1-y^2c_2+\delta(\tau_2 y c_1+\tau_1 c_0) \\ sg = yc_1+\eta y^2 c_2+\mu^{-1/2}\delta(\tau_1 y c_1-\tau_2 c_0)-\eta\delta(\tau_2 y c_1+\tau_1 c_0) \\ h = -\delta\cdot c_0^{-2}(\vec{r}\cdot\vec{c}_1) \end{cases}$$

Ripeto de la formuloj (11), (12)-(16) en la trovita proksimumigo donas
(17) kun unu plia grado de la proksimumigo ktp.
Kun tiel kalkulitaj f,g,h, oni povas trovi por ĉiuj observoj

$$\vec{r}_i^{\,k} = f_i\vec{r} + g_i\vec{v} + h_i\vec{c}\,, \qquad (\vec{c}=\vec{r}\times\vec{v}) \tag{18}$$

l,am en la p.5. ĉi tio enportas la sekvantajn ŝanĝojn:

(5.3) fariĝas

$$\tfrac{1}{2}\Delta U = \sum \vec{w}_i\cdot\Delta(f_i\vec{r}+g_i\vec{v}+h_i\vec{c}) = 0, \quad \vec{w}_i = \vec{E}_i\times\left[(f_i\vec{r}+g_i\vec{v}+h_i\vec{c})\times\vec{E}_i\right] \tag{19}$$

respektive

$$\vec{w}_i = f_i\vec{r}+g_i\vec{v}+h_i\vec{c} - \vec{r}_i \tag{19a}$$

en la p.6. (kompletaj observoj).
Sed $\Delta(h_i\vec{c})$ - mi uzis ĉi tie la signon Δ por la etaj ŝanĝoj, anstataŭ δ,
por ne konfuzi ĝin kun la eta perturba faktoro - estas plene neglektebla,
ĉar h_i havas la etan faktoron δ, laŭ (6), do oni povas senzorge liberiĝi de
penaj kalkuloj por la esprimoj pri la ŝanĝoj $\Delta(h_i\vec{c})$, kiujn poste oni multi-
plikas per malgrandaj $\vec{w}_i$. Kaj en la esprimoj por Δf_i kaj Δg_i, pro la sama
kaŭzo, oni povas forjeti la ŝanĝojn de la partoj (17) enhavantaj la faktoron
δ. Ĉar la resto kongruas kun la ŝanĝoj trovitaj kiel (5,9), oni povas ankaŭ
ĉi tie apliki la ekvaciojn (5,11), kun nura aldono de la sumetoj

$$h_i\vec{c}\cdot\Delta(f_i\vec{r}+g_i\vec{v}) = h_i\vec{c}\cdot f_i\Delta\vec{r} + h_i\vec{c}\cdot g_i\Delta\vec{v}\,,$$

do (5,11) fariĝas

$$\left\{\begin{aligned} &(\textstyle\sum \vec{w}_i\cdot\vec{f}_i)\vec{r} + (\sum \vec{w}_i\cdot\vec{g}_i)\vec{v} = \vec{v}\times(\sum h_i\vec{w}_i) + \sum f_i\vec{w}_i \\ &(\textstyle\sum \vec{w}_i\cdot\vec{g}_i)\vec{r} + (\sum \vec{w}_i\cdot\vec{h}_i)\vec{v} = (\sum h_i\vec{w}_i)\times\vec{r} + \sum g_i\vec{w}_i \end{aligned}\right. \tag{20}$$

kun la koncernaj aldonaj membroj en la esprimoj (5,11c).
La aldonaj membroj - al la matrico

$$c^2\begin{bmatrix} \alpha_r & \alpha_v & \alpha_c \\ \beta_r & \beta_v & \beta_c \end{bmatrix}$$

devenas de la unuaj dekstraflankaj membroj en (20), pro ilia diskompono en
la direktojn $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{c}$; ili estas

$$\left\{\begin{matrix} \vec{v}_0^{\,2}\cdot\sum h_i\vec{w}_i\cdot\vec{c} & -\vec{r}_0\cdot\vec{v}_0\sum h_i\vec{w}_i\cdot\vec{c} & -(\vec{v}_0\vec{c}\sum h_i\vec{w}_i) \\ -\vec{r}_0\cdot\vec{v}_0\sum h_i\vec{w}_i\cdot\vec{c} & r_0^2\sum h_i\vec{w}_i\cdot\vec{c} & -(\vec{c}\vec{r}_0\sum h_i\vec{w}_i) \end{matrix}\right. \tag{21}$$

7.1. Trarigardo de la formuloj

Se ankaŭ la perturboj estas konsiderendaj dum la orbitdetermino el plu-
raj observoj, tiam oni unue determinas la orbiton laŭ la p.5.1. de ĉi tiu ver-

ko. Post tio venas la jena procedo (kiel la resumo el la ĵus pritraktitaj formuloj):

Por la meza momento t_o, kun kiu estas ligitaj la trovataj elementoj, oni kalkulas la esprimojn I (el 5.1.). En la esprimoj II oni aplikas (por trovi y_i por ĉiuj observo-momentoj) la formulon (14) de ĉi tiu punkto. Sed antaŭ tio estas kalkulendaj $\vec{c}_o$, $\vec{c}_1$ el (2) kaj $\vec{e}_o$, $\vec{e}_1$ el (3), kun utiligo de la jam faritaj neperturbaj kalkuloj. Tiam oni kalkulas, por ĉiu necesa momento, d el (12), τ_1, τ_2 el (11) ρ, H_1, T el (15) kaj (16) - por povi trovi J kaj y el (14).

Post tio eblas kalkuli la perturbitajn Lagrange-koeficientojn (17), utiligante la formulojn II kaj III el 5.1. Oni havas nun:

$$(22)\quad \begin{cases} f = 1-p''+\delta(\tau_2 p'+\tau_1 c_o), \qquad h = -\delta c_o^{-2}(\vec{r}\cdot\vec{c}_1)\ , \\ \hat{g} = sg = p'+\eta p''+\sqrt{1/\mu}\,\delta(\tau_1 p'-\tau_2 c_o)-\eta\delta(\tau_2 p'+\tau_1 c_o)\ . \end{cases}$$

Tiam oni havos la novajn pozicivektorojn (18), sekve la novajn deviojn de la observoj - kiel (19) se temas pri la direkto-observoj aŭ (19a) se estas la kompletaj observoj (p.6. de ĉi tiu verko).

Tio permesos kalkuli (por ĉiu observo aparte) - laŭ la formuloj el 5.1. - IV, V, VI kaj sumige trovi ĉiujn kvantojn VII, aldone:

$$(23)\qquad H = \sum h_i\delta_{ri}\,,\quad H' = \sum h_i\delta_{vi}\,,\quad H'' = \sum h_i\delta_{ci}$$

La grupo de la formuloj VIII restas la sama, sed la grupo IX, pro la aldonaĵoj (21) kaj (23) fariĝas:

$$\mathrm{IX}\quad \begin{cases} c^2\alpha_c = F''-\vec{v}^2H+(\vec{r}\vec{v})H'\ , & c^2\beta_c = G''-r^2H'+(\vec{r}\vec{v})H \\ c^2\alpha_v = r^2F'+(\vec{r}\vec{v})(H''-F)-c^2\beta\ , & c^2\beta_v = r^2(G'+H'')-(\vec{r}\vec{v})G-c^2\gamma\ , \\ c^2\alpha_r = \vec{v}^2(H''+F)-(\vec{r}\vec{v})F-c^2\alpha\ , & c^2\beta_r = \vec{v}^2G+(\vec{r}\vec{v})(H''-G')-c^2\beta\ . \end{cases}$$

La trovitaj kvantoj VIII kaj IX permesas kalkuli tuj la elemento-korektojn laŭ la jam trovita solvo (5.15). Ripeti la solvon certe neniam estos bezono. Sed se tamen iam montriĝos bezono, la vojo estas tute la sama - nur la ekiraj elementoj estas iom modifitaj.

LA MENCIITA LITERATURO

Andoyer H. 1917: Sur la détermination d'une orbite képlerienne par trois observations rapprochées, Bulletin astronomique, Paris, Vol. 34, p. 36.

Bond 1966: A Recursive Formulation...., Astr. Journal, Vol. 71, 1, 8-9.

Goodyear 1965: Completely General Closed-Form Solution for Coordinates and Partial Derivatives of the Tho-Body Problem, Astr. Journal, Vol. 70, n-ro 3, 189-192.

Kustaanheimo 1960: On the Determination of Orbits of Comets and Asteroids, Soc. Sc. Fenn. Comm. Phys. Math., XXV, 25-47 ≡ Publ. Astr. Obs. Helsinki, 84.

Kustaanheimo k Nuotio 1966: Lectures on Celestial Mechanics, Publ. of the Astr. Observ. Helsinki, n-ro 117.

Kühnert 1879: Über Folgerungen aus v. Opolzer's ..., Astr. Nachrichten, 95, 145-150.

Lagrange 1778: Sur le problème de la determination des orbites des comètes d'après trois observations (Oeuvres de Lagrange, T.IV, p. 439)

Pines S. 1961: Variation of Parameters for Elliptic and Near Circular Orbits, Astr. Journal, Vol. 66, 1, 5-7.

Popoviĉ B. 1956: Nove formule i tablice za f i g kod izraĉunavanja heliocentriĉnih poloẑaja malih planeta, RASPRAVE Jug. akad. znanosti i umjetnosti, Zagreb, Vol. 1, n-ro 7, 199-222.

--------- *1957:* Eltrovado de la vektoraj elementoj de planedetorbito el du observoj kaj la moviĝdirekto, I (Teorio) - VESNIK Druŝtva mat. i fiz. Srbije, Beograd, IX 37-54; II (Apliko de la metodo) BILTEN Druŝt. mat. fiz. Makedonije, Skopje, VIII, 29-37.

--------- *1958:* Senpera korektado de la vektoraj elementoj de planedetorbitoj, SCIENCAJ STUDOJ de Internacia Scienca Asocio Esperantista (Jubileo), Kopenhago, 133-148.

--------- *1958a:* Odredjivanje vektorskih elemenata putanja malih planeta (Eltrovado de vektoraj elementoj de planedetorbitoj), RADOVI Nauĉnog druŝ. Bosne i Hercegovine, Sarajevo, XI, 99-150.

--------- *1959:* Kalkulado de planed- kaj kometefemeridoj senpere el iliaj pozicio kaj rapido, BULLETIN de l'Observ. Astron. Beograd, 24, p. 13.

--------- *1959a:* Eltrovado de planedetperturboj pere de komencaj suncentraj pozicio kaj rapido, VESNIK Druŝ. mat. fiz. Srbije, Beograd, XI, 151.

--------- *1969:* Jedna opŝta metoda za odredjivanje putanja malih planeta i kometa, GLAS 274 Srpske akad. nauka i umetn., Odel. prir.-mat.nauka, 31, 13-32.

--------- *1970:* Izraĉunavanje elemenata putanje male planete ili komete neposredno iz viŝe posmatranja, MATEMATIĈKI VESNIK, Matemat. institut, Beograd, 7(22), 235-246.

--------- *1971:* Uravnenija vozmuŝĉenij malih planet, prigodnie dlja ljubih ekscentrisitetov, BJULLETEN de la Instituto por Teoria astronomio, Leningrad, XII, n-ro 10(143), 890-898.

--------- *1972:* Lagrange-koeficientoj f,g,h, por la perturbata moviĝo, BULLETIN de l'Observ. Astron. Beograd, Vol. XXIX, F.1, 60-64.

Sconzo P. 1963: Explicit Expressions for the 36 Terms of the Jacobian Matrix Used in Orbit Computation, Mem. Soc. Astr. Italiana, XXXIV, n-ro 2.

Sconzo, Schach, Toberg 1965: Symbolic Computation of f and g Series by Computer, Astr. Journal, Vol. 70, 1, 269-271.

Stumpff K. 1947: Neue Formeln und Hilfstafeln zur Ephemeridenrechnung, Astr. Nachrichten, 275, 108.

--------- *1959:* Himmelsmechanik, I, VEB, Berlin.

KALKULADO DE PLEJ OFTE UZATAJ ELEMENTOJ

Aliaj orbitelementoj estas praktike ĉiuj ligitaj kun du sistemoj de la elementoj:

1) vektoraj elementoj (de Milankoviĉ): $\vec{c}$, $\vec{e}$, T ;

2) sferaj elipsaj elementoj i, Ω, ω, a, e, ε.

Pro tio mi limigos min al la ligoj kun tiuj du element'sistemoj.

Transiro al la elementoj ($\vec{c}$, $\vec{e}$, T).

Jam la integraloj (1.2) kaj (1.9) donas

$$\vec{c} = \vec{r}_0\times\vec{v}_0 , \qquad \mu\vec{e} = \vec{v}_0\times\vec{c} - \mu\vec{r}_0/r_0 \tag{1}$$

Por trovi T (la tempo kiam oni trapasas perihelion), la Keplera ekvacio donas (por la momento t_0)

$$T = t_0 - \frac{u_0 - e\sin u_0}{n} \tag{2}$$

kie

$$n = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} , \qquad \mu a = \frac{c^2}{1-e^2} \tag{3}$$

$$\sin u_0 = \frac{r_0(\vec{r}_0\cdot\vec{v}_0)}{cea(1-e^2)} , \qquad \cos u_0 = e + \frac{c^2-\mu r_0}{\mu ae} \tag{4}$$

La lastajn du esprimojn (el kiuj unu estas nur la kontrola) oni tiras el la esprimo

$$\vec{r} = a(\cos u-e)\frac{\vec{e}}{e} + a\sqrt{1-e^2}\sin u\,\frac{\vec{c}\times\vec{e}}{ce} \tag{5}$$

utiligata kiel $\vec{r}_0$ (por la momento t_0) kaj multiplikata per $\vec{c}\times\vec{e}$ kaj $\vec{e}$ el (1).

Utiligo de la vektoraj elementoj

Por trovi $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$ el la vektoraj elementoj, plej facile estas preni por la ekira momento t_0 ĝuste la elementon T. Tiam (5) donas

$$\vec{r}_0 = a(1-e)\vec{P} , \text{ kie } \vec{P} = \frac{\vec{e}}{e} \text{ kaj a trovata el (3) .} \tag{6}$$

Post tio

$$\vec{c}\times\vec{r}_0 = r_0^2\vec{v}_0-(\vec{r}_0\cdot\vec{v}_0)\vec{r}_0 = r_0^2\vec{v}_0$$

(ĉar $\vec{v}_0\perp\vec{r}_0$ dum oni trapasas la perihelion). Do

$$\vec{v}_0 = r_0^{-2}a(1-e)\vec{c}\times\vec{P} = r_0^{-2}a(1-e)\vec{Q} , \qquad \vec{Q} = (\vec{c}\times\vec{e}):(ce) . \tag{7}$$

RIMARKO: Se oni deziras havi la elementojn ($\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$) por iu alia momento (t_1), oni utiligos

$$\vec{r} = f\vec{r}_0 + g\vec{v}_0 \,, \qquad \vec{v} = f'\vec{r}_0 + g'\vec{v}_0 \,,$$

laŭ la p. 2 de ĉi tiu verko.

U t i l i g o d e l a s f e r a j e l e m e n t o j

Kiam oni havas la sferajn elementojn, tiam la projekcioj de la vektoroj $\vec{c}$ kaj $\vec{k}\times\vec{c}$ ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ estas la unuovektoroj de tri rektangulaj aksoj el la fundamenta ebeno kaj orte al ĝi), donas

$$(8) \qquad \begin{cases} \vec{c}\cdot\vec{k} = c \cos i \\ (\vec{k}\times\vec{c})\cdot\vec{i} = c \sin i \cos\Omega = -\vec{c}\cdot\vec{j} \\ (\vec{k}\times\vec{c})\cdot\vec{j} = c \sin i \sin\Omega = \vec{c}\cdot\vec{i} \end{cases}$$

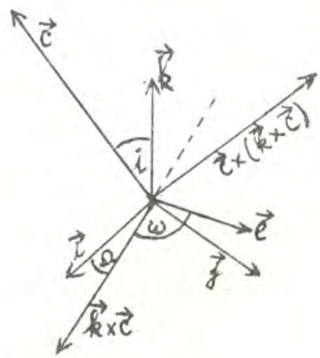
Simile la diskompono de $\vec{e}$ en la direktojn de $\vec{k}\times\vec{c}$ kaj $\vec{c}\times(\vec{k}\times\vec{c})$ donas

$$\vec{e} = e \cos\omega \frac{\vec{k}\times\vec{c}}{c \sin i} + e \sin\omega \frac{\vec{c}}{c}\times\frac{\vec{k}\times\vec{c}}{c \sin i} =$$

$$= e \cos\omega(\cos\Omega\vec{i} + \sin\Omega\vec{j}) + e \frac{\sin\omega}{\sin i}\vec{k} - e \sin\omega\frac{\cos i}{c \sin i}\vec{c}$$

Se oni utiligas la jam trovitajn komponantojn de $\vec{c}$, oni havas

$$(9) \qquad \begin{cases} \vec{e}\cdot\vec{i} = e \cos\omega\cos\Omega - e \sin\omega \cos i \sin\Omega \\ \vec{e}\cdot\vec{j} = e \cos\omega\sin\Omega + e \sin\omega \cos i \cos\Omega \\ \vec{e}\cdot\vec{k} = \frac{e}{\sin i} \sin\omega(1-\cos^2 i) = e \sin\omega\sin i \end{cases}$$



Estas ankoraŭ nekonataj c kaj T. Pro c oni utiligu a el (3) kaj pro T oni utiligu la difinon de ε:

$$\varepsilon = \Omega+\omega - nT \,,$$

do

$$(10) \qquad T = \frac{\Omega+\omega-\varepsilon}{n} \,, \qquad n = \sqrt{\mu a^{-3}}$$

T r a n s i r o a l l a s f e r a j e l e m e n t o j

Se oni havas $(\vec{r}_0, \vec{v}_0)$ kaj oni deziras trovi la sferajn elementojn, tiam oni unue trovas $\vec{c}$, $\vec{e}$ laŭ (1), post kio el (8) sekvas

$$\cos i = \frac{\vec{c}\cdot\vec{k}}{c} \qquad \mathrm{tg}\Omega = -\frac{\vec{c}\cdot\vec{i}}{\vec{c}\cdot\vec{j}}$$

kie la signoj de $\cos\Omega$ kaj $\sin\Omega$ estas kontrolataj per du lastaj egalaĵoj (8). El (9) tiam oni trovas

$$\sin\omega = \frac{\vec{e}\cdot\vec{k}}{e \sin i} \,, \quad \cos\omega = \frac{(\vec{e}\cdot\vec{i})\cos\Omega + (\vec{e}\cdot\vec{j})\sin\Omega}{e}$$

Fine oni kalkulas T laŭ (2), kun (3) kaj (4), kaj tio donos

$$\varepsilon = \Omega + \omega - nT \,.$$