SCIENCA REVUO de Internacia Scienca Asocio Esperantista BEOGRAD, Jugoslavio | El Vol.23 n-ro 6(98) 20.12.1972.

KALKULADO DE LA MOVIĜO ĈIRKAŬ AKSOSIMETRIA PLANEDO SEN LA SEKULAJ MEMBROJ *)

(Boĵ. Popoviĉ, Beograd, Jugoslavio)

En la verkaĵo [1a], [1b] mi donis en la sferaj koordinatoj (r, λ, ϕ) la sekvantajn ekvaciojn por la moviĝo ĉirkaŭ aksosimetria planedo

$$(1) \qquad \frac{ds}{\sqrt{\zeta(1-s^2)-C^2}} = \frac{du}{\sqrt{2U-\zeta u^2}} = u^2 dt, \quad d\zeta = -\delta\frac{\partial U}{\partial s}ds, \quad d\lambda = C\frac{u^2}{1-s^2}dt$$

kie estas uzataj la signaĵoj

$$(2) \qquad u = 1/r, \quad s = \sin\phi, \quad \zeta = (\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt})^2 \quad .$$

$$(3) \qquad 2U = h+2\mu u-\delta u^2 U_1, \quad U_1 = u(3s^2-1)+\delta U_2, \quad U_2 = 2\sum_{k=3}^{\infty} j_k u^{k-1} P_k(s),$$

C, h, μ, j_k konstantoj, $P_k(s)$ polinomoj de *Legendre*, δ eta kvanto samranga kun la plateco de la planedo.

En la sama verkaĵo mi montris kiel oni povas trovi sufiĉe proksimumajn solvojn de ĉi tiuj ekvacioj, inklude je δ^2 (kvadrato de planedplateco). La manko de la solvo estas ĝia neaplikeblecopor tro malgrandaj inklinoj kaj ekscentriĝoj de la orbitoj, kvankam ĉio tio ofte okazas. En la antaŭnelonga artikolo [2] *Z.Ŝiŝoviĉ* iom malaltigis ĉi tiujn mankojn, sed ne multe. Malgraŭ pluraj klopodoj, ni eĉ kune ne sukcesis per la ĝistiama vojo forigi la mankojn.

Nur post la komparo kun similaj problemoj el planedetperturboj, mi konkludis ke ne sufiĉas nur ŝanĝetoj en la solvadvojo por forigi la mankojn, sed ke oni devas enkonduki tute novan variablon. Nome la antaŭa integrometodo utiligis la "veran anomalion" el la elipsa moviĝo (kun iom variiĝaj elementoj). La solvon oni povis trovi an-

---

+/ *La esploroj faritaj laŭ la kontrakto 150/2 (15.03.1968.) kun la Matematika Instituto en Beograd (Jugoslavio).*

kaŭ kun utiligo de la "ekscentra anomalio" - oni trovis iom pli konvenan solvon, tamen tre ŝanĝiĝan ĉe etaj ekscentriĝoj aŭ inklinoj.

Pro tio mi utiligis novan variablon, kiun en la dukorpan problemon enkondukis *K.Stumpff* [3] kaj kiun mi jam utiligadis en orbitteorio, en iom modifita formo kun la nomo "anomalio de komenco"[4]. La apliko de ĉi tiu anomalio ebligas solvon de la supraj ekvacioj, sen la menciitaj mankoj kaj kun pli facila ebleco por plilarĝigo de la vojo al la tria grado de planedplateco.

En la unua parto de la verkaĵo mi donos novan formon de la ekvacioj, kun la bazo por ilia solvo, en la dua parto venos la nula proksimumigo, poste la unua proksimumigo kaj en la kvara parto la dua proksimumigo. Fine la kvina parto donas la esprimon por, komence flankenlasita, λ.

SIGNIFOJ DE LA UTILIGATAJ SIGNAĴOJ

A_0, B_0, C_0 difinitaj per (37)	$\alpha^2 = 1+2\beta_0-\gamma^2$, $\alpha' = \alpha_0\beta_1$
A_1, B_1, C_1 difinitaj per (38)	$\alpha'' = \beta_1^2 + (\beta'')^2$, $\alpha_0'' = (\alpha_0^2-\beta_0^2):(\alpha_0^2+\beta_0^2)$
C areointegralo (z-aksa projekcio)	$\beta_0 = -1-\mu/(r_0 h)$, $\beta_1^2 = 1/(1+\beta_0)$
c_0, c_1, c_2, c_3 difinitaj per (16)	$\beta' = \beta_0\beta_1^2$, $\beta'' = \beta'/\alpha'$, $\beta_0'' = 2\alpha_0\beta_0:(\alpha_0^2+\beta_0^2)$
h konstanto de energio	$\beta_2 = -1+2\mu r_0/\zeta_0 = (1+\alpha_0^2):(\gamma_0^2)$
$M_1, M_2, ;;, M_5$ difinitaj per (39), (41)	$\gamma^2 = \zeta^*/(-r_0^2 h)$, $\gamma_0^2 = \zeta_0/(-r_0^2 h)$
$m^2 = 1-C^2/\zeta$	δ samranga kun planedetplateco
$n^2 = \mu r_0^{-3}$	$\sigma = \alpha/\gamma$, $\sigma_0^2 = (r_0^2 h+2\mu r_0-\zeta_0):\zeta_0$
$Q = \operatorname{arc\,tg} q$	$\tau = (\beta_0-\alpha^2):(\alpha\gamma)$
$q = (w+\alpha)/\gamma$	η el $\sin\eta = s/m$
$s = \sin\phi$	$\eta^0 = \eta_0'' + 2\operatorname{arctg} q$, $\eta_0'' = \eta_0 - 2\operatorname{arctg} q_0$
$u = 1/r$	
U la potencialo de la planedo (3)	$\zeta = (\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt})^2$
$2U = h+2\mu u-\delta u^2 U_1$, $U_1 = u(3s^2-1)+\delta U_2$	
w difinita per (7)	$\zeta^* = \zeta+\delta U_1$
Y difinita per (6)	$\eta_s', \eta_c', \zeta_s', \zeta_c$ el (41)
y difinita per (14)	

1/ NOVAJ FORMOJ DE LA EKVACIOJ

En la unuan ekvacion (1) metu

(4) $$s = m\sin\eta \quad , \quad m^2 = 1-C^2/\zeta \quad ;$$

ĝi fariĝas

$$ds = \frac{m\cos\eta.\sqrt{\zeta}}{\sqrt{2U-\zeta u^2}}du \quad .$$

Aliflanke

(5) $$2m.dm = C^2\zeta^{-2}d\zeta$$

$$2m.ds = 2m(\sin\eta.dm+m\cos\eta.d\eta) = C^2\zeta^{-2}\sin\eta.d\zeta+2m^2\cos\eta.d\eta$$

do

$$2m^2\cos\eta d\eta = (2m+\delta C^2\zeta^{-2}\sin\eta\frac{\partial U_1}{\partial s})\,ds = (2m+\delta C^2\zeta^{-2}\sin\eta\frac{\partial U_1}{\partial s})\,\frac{m\sqrt{\zeta}\cos\eta.du}{\sqrt{2U-\zeta u^2}}$$

$$(6)\qquad d\eta = (1+\delta Y)\frac{\sqrt{\zeta}\,du}{\sqrt{2U-\zeta u^2}}\,,\quad Y = 3uC^2\zeta^{-2}\sin^2\eta + \frac{\delta}{2m}C^2\zeta^{-2}\sin\eta\frac{\partial U_2}{\partial s}$$

ĉe kio la esprimo por Y venis per

$$\frac{\sin\eta}{2m}\,\frac{\partial U_1}{\partial s} = \sin\eta\,(\frac{6us}{2m} + \frac{\delta}{2m}\,\frac{\partial U_2}{\partial s})$$

En la duan ekvacion (1) enkonduku novan variablon w kaj novajn signaĵojn difinitajn per

$$(7)\qquad r = r_0(1 + 2\frac{\alpha w+\beta_0}{w^2+1})$$

$$(8)\qquad \beta_0 = -\frac{\mu+r_0h}{r_0h}\,,\quad \alpha^2 = 1+2\beta_0-\gamma^2\,,\quad \gamma^2 = \frac{\zeta^*}{-r_0^2h}\,,\quad \zeta^* = \zeta+\delta U_1\,;$$

Emfazu tuj ke la ekira momento (t_0) donas

$$w_0^2+2\alpha_0w_0+2\beta_0+1 = w_0^2+1$$

$$(9)\qquad w_0 = -\beta_0/\alpha_0$$

Kun la nova variablo w oni havos

$$(10)\qquad dr = -2r_0\frac{\alpha w^2+2\beta_0w-\alpha}{(w^2+1)^2}dw + \frac{w\,d\zeta^*}{\alpha r_0h(w^2+1)}$$

Krom tio

$$(10a)\qquad (w^2+1)^2(2r^2U-\zeta) = r_0^2h(w^2+2\beta_0+2\alpha w+1)^2+2\mu r_0(w^2+1)(w^2+2\alpha w+2\beta_0+1) -$$

$$-\zeta^*(w^2+1)^2 = -r_0^2h(\alpha w^2+2\beta_0w-\alpha)^2$$

pro kio la dua ekvacio (1) donas

$$dt = \frac{-r.dr}{\sqrt{2r^2U-\zeta}} = \frac{\alpha^2+2\alpha w+2\beta_0+1}{(w^2+1)^2}.\frac{2r_0^2(\alpha w^2+2\beta_0w-\alpha)dw - w(w^2+1)d\zeta^*/(\alpha h)}{r_0\sqrt{-h}(\alpha w^2+2\beta_0w-\alpha)}$$

$$n.dt = \frac{2r_0n}{\sqrt{-h}}.\frac{w^2+2\alpha w+2\beta_0+1}{(w^2+1)^2}dw - \frac{w^2+2\alpha w+2\beta_0+1}{\alpha h(w^2+1)}.\frac{nw}{r_0\sqrt{-h}}.\frac{d\zeta^*}{\alpha w^2+2\beta_0w-\alpha}$$

La unuan membron oni povus integri se ankau α estus tute konstanta kvanto. Tio ne estas, sed tion oni povas konsideri per la necesa aldonaĵo kaj ni havos

$$(11)\qquad n(t-t_0) = \frac{2}{\beta_1}\left[\frac{\beta_0w-\alpha}{w^2+1} + \beta_1^{-2}\operatorname{arctg} w\right]_{t=t_0}^{t} - \delta J$$

(11a) $$-\delta J = \frac{2}{\beta_1}\int_{t_0}^{t}\frac{d\alpha}{w^2+1} + \beta_1^{-3}/(\mu r_0)\int_{t_0}^{t}\frac{w(w^2+2\alpha w+2\beta_0+1)}{\alpha(w^2+1)(\alpha w^2+2\beta_0 w-\alpha)}\,d\zeta^* =$$
$$= \frac{1}{\mu r_0}\beta_1^{-3}\int_{t_0}^{t}\frac{w+\alpha}{\alpha(\alpha w^2+2\beta_0 w-\alpha)}\,d\zeta^*$$

Konsiderante ke ζ^*, pere de (1) kaj (3), donas

(12) $$d\zeta^* = -\delta\cdot\frac{\partial U_1}{\partial s}ds + \delta\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}du + \frac{\partial U_1}{\partial s}ds\right) = \delta\cdot\frac{\partial U_1}{\partial u}du$$

oni havas fine

(13) $$J = -(\mu r_0\beta_1^3)^{-1}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial U_1}{\partial u}\cdot\frac{(w+\alpha)du}{\alpha(\alpha w^2+2\beta_0 w-\alpha)}$$

La variablo w estas rekte ligita kun la "anomalio de komenco", kiun oni difinu per

(14) $$\beta_1 y = 2(\operatorname{arctg} w - \operatorname{arctg} w_0)\ , \qquad \frac{w-w_0}{1+ww_0} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta_1 y$$

(15) $$w = \frac{w_0+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta_1 y}{1-w_0\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta_1 y} = \frac{(1-\cos\beta_1 y)+w_0\sin\beta_1 y}{\sin\beta_1 y-w_0(1-\cos\beta_1 y)}$$

Tiam al la unua frakcio de (11) oni povas doni la formon

$$\frac{[(\beta_0+\alpha w_0)(1-\cos\beta_1 y)+(\beta_0 w_0-\alpha)\sin\beta_1 y][\sin\beta_1 y-w_0(1-\cos\beta_1 y)]}{(1+w_0^2)(1-\cos\beta_1 y)^2 + (1+w_0^2)\sin^2\beta_1 y}\ .$$

kiu - kun $\alpha_0 w_0+\beta_0 = 0$ el (9) kaj reduktita per $1-\cos\beta_1 y$ - fariĝas

$$\frac{-(\alpha-\alpha_0)\beta_0[\alpha_0\sin\beta_1 y+\beta_0(1-\cos\beta_1 y)] - (\beta_0^2+\alpha\alpha_0)[\alpha_0(1+\cos\beta_1 y+\beta_0\sin\beta_1 y]}{2(\alpha_0^2+\beta_0^2)}$$

En la ekira momento estas y=0, laŭ la difino (14). Se ni krome utiligos la funkciojn

(16) $$c_0 = \cos\beta_1 y,\quad c_1 = \frac{\sin\beta_1 y}{\beta_1 y},\quad c_2 = \frac{1-\cos\beta_1 y}{(\beta_1 y)^2},\quad c_3 = \frac{\beta_1 y-\sin\beta_1 y}{(\beta_1 y)^3} = \frac{1-c_1}{(\beta_1 y)^2}$$

kiujn en la teorion de orbitoj utiligis K. Stumpff [3], la ekvacio (11) fariĝas

$$n(t-t_0)+\delta J = (\beta_0+1)y - \frac{1}{\beta_1(\alpha_0^2+\beta_0^2)}\Big[(\alpha-\alpha_0)\beta_0(\alpha_0\beta_1 yc_1+\beta_0\beta_1^2 y^2 c_2) -$$
$$-2\alpha_0(\alpha_0^2+\beta_0^2)+(\beta_0^2+\alpha\alpha_0)(2\alpha_0-\alpha_0\beta_1^2 y^2 c_2+\beta_0\beta_1 yc_1)\Big] = y+\beta_0 y+\beta_1^{-1}(\alpha_0\beta_1^2 y^2 c_2-$$
$$-\beta_0\beta_1 yc_1) - \frac{\alpha-\alpha_0}{\alpha_0^2+\beta_0^2}\Big[\beta_0(\alpha_0 yc_1+\beta_0\beta_1 y^2 c_2) + \frac{\alpha_0}{\beta_1}(2\alpha_0-\alpha_0\beta_1^2 y^2 c_2+\beta_0\beta_1 yc_1)\Big]$$

Utiligu ĉi tie ankoraŭ $\beta_0 = -1+\beta_1^{-2}$, $1-c_0=\beta_1^2 y^2 c_2$, el (8) kaj (16), por fine ricevi

$$(17)\qquad y = \frac{n(t-t_0)+\delta J + \frac{\alpha-\alpha_0}{\beta_1}(1+\alpha''_0 c_0+\beta''_0\beta_1 y c_1)}{1+\alpha' y c_2+\beta' y^2 c_3}$$

Ĉi tio estas la kompleta esprimo por kalkuladi la anomalion y kiel funkcion de tempo, sen iaj ajn neglektoj. Sed por ĝia efektiva utiligo oni necesos du etapojn de la proksimumado: a/ kalkulo de la indikita integralo J kaj de $(\alpha-\alpha_0)$ kun la necesa precizeco kaj poste b/ utiligo de la unua valoro de y por ĝia plua eltrovo per la sinsekvaj proksimumigoj.

La formulo (7) por r estas facile esprimebla en la nova anomalio. Nome prenu w el (15), enigu ĝin en (7), kun w_0 el (9), kaj tiam reduktu la frakcion per $2(1-\cos\beta_1 y)$:

$$\frac{r}{r_0} - 1 = \frac{2(\alpha-\beta_0 w_0)(1-\cos\beta_1 y)+(\alpha w_0+\beta_0)\sin\beta_1 y}{(1+w_0^2)(1-\cos\beta_1 y)^2+(1+w_0^2)\sin^2\beta_1 y}\left[\sin\beta_1 y - w_0(1-\cos\beta_1 y)\right]$$

$$= (\alpha_0^2+\beta_0^2)^{-1}\{(\alpha\alpha_0+\beta_0^2)\left[\alpha_0\sin\beta_1 y+\beta_0(1-\cos\beta_1 y)\right] - \beta_0(\alpha-\alpha_0)\left[\alpha_0(1+\cos\beta_1 y)+\right.$$

$$\left.+\beta_0\sin\beta_1 y\right]\} = \alpha_0\sin\beta_1 y+\beta_0(1-\cos\beta_1 y) + (\alpha-\alpha_0)(\alpha''_0\sin\beta_1 y-\beta''_0\cos\beta_1 y)\ .$$

De tie la fina esprimo

$$(18)\qquad r/r_0 = 1+\alpha' y c_1 + \beta' y^2 c_2 + (\alpha-\alpha_0)(\alpha''_0\beta_1 y c_1-\beta''_0 c_0)$$

Restas ankoraŭ la koncerna formo de la diferenciala esprimo por s, respektive por η, pro (4). Utiligu por tio (6) kaj tien enigu la variablon w per (7), kio - konsiderante ankaŭ dr el (10) kaj (10a):

$$\frac{d\eta}{\sqrt{\zeta}} = (1+\delta Y)\frac{-dr}{r\sqrt{2r^2U-\zeta}} = \frac{1+\delta Y}{\alpha r_0 h}\cdot\frac{2r_0^2\alpha h(\alpha w^2+2\beta_0 w-\alpha)dw - w(w+1)d\zeta^*}{r_0(w^2+2\alpha w+2\beta_0+1)r_0\sqrt{-h}(\alpha w^2+2\beta_0 w-\alpha)} =$$

$$= \frac{1+\delta Y}{r_0\sqrt{-h}}\left[\frac{2dw}{(w+\alpha)^2+\gamma^2} - \frac{w(w+1)\ d\zeta^*}{\alpha r_0^2 h(w^2+2\alpha w+2\beta_0+1)(\alpha w^2+2\beta_0 w-\alpha)}\right] =$$

$$= \frac{1+\delta Y}{\sqrt{\zeta^*}}\left[2\,d\,\mathrm{arctg}\frac{w+\alpha}{\gamma} + 2\frac{(w+\alpha)d\gamma-\gamma d\alpha}{(w+\alpha)^2+\gamma^2} - \frac{\gamma w(w^2+1)\ d\zeta^*}{\alpha r_0^2 h(w^2+2\alpha w+2\beta_0+1)(\alpha w^2+2\beta_0 w-\alpha)}\right]$$

Oni povas integri parton de ĉi tiu esprimo kaj ricevi

$$\eta = \eta_0 + 2\,\mathrm{arctg}\,q\,\Big|_{t=t_0}^{t} + \delta\cdot\eta'\ ,\qquad q = \frac{w+\alpha}{\gamma}$$

kun

$$d\eta' = -\int_{t_0}^{t}(\sqrt{\zeta^*/\zeta}-1)d\eta + 2\delta\int_{t_0}^{t} Y\cdot\frac{dq}{q^2+1} -$$

$$-\int_{t_0}^{t}\frac{(1+\delta Y)}{\alpha\gamma r_0^2 h}\left[(w+\alpha)\alpha+\gamma^2 + \frac{\gamma^2 w(w^2+1)}{\alpha w^2+2\beta_0 w-\alpha}\right]\frac{d\zeta^*}{(w+\alpha)^2+\gamma^2}$$

Ankaŭ ĝi estas la fina esprimo, sen neglektado, por η. La indikitaj integraloj (el $\delta\cdot\eta'$) estas malgrandaj kvantoj samrangaj kun δ (kaj kun pli altaj gradoj). Sed oni povas esprimi la lastan integralon per q, pro kio la tuta esprimo iom plisimpliĝas. Tiucele estas utilaj signaĵoj

(19°) $\eta^{o} = \eta''_0 + 2\,\mathrm{arctg}\, q\,, \quad \eta''_0 = \eta_0 - 2\,\mathrm{arctg} q_0$.

Utiligante (12) por $d\zeta^*$, oni trovas

(19) $$\eta = \eta^{o} + \delta\cdot\eta' \,, \quad \delta\cdot\eta' = \int_{t_0}^{t} (1-\sqrt{1+\delta\cdot U_1/\zeta})\,d\eta + 2\delta\int_{t_0}^{t} Y\frac{dq}{q^2+1} +$$
$$+\delta\int_{t_0}^{t} (1+\delta Y)\frac{q(1+2\beta_0)-2\sigma(1+\beta_0)}{\alpha^2\zeta^*(q^2+2\tau q-1)}\cdot\frac{\partial U_1}{\partial u}du$$

ĉe kio la numeratoro de la lasta integriga funkcio, ordigita laŭ la gradoj de q, montris la eblecon esti dividita per q^2+1 (el la denominatoro).

Kio koncernas la esprimoń por q, utiligu unue (15) kun w_0 el (9), kio donas

$$w = \frac{\alpha_0}{\beta_0} - \frac{(\beta_0+\alpha_0^2/\beta_0)\sin(\beta_1 y)}{\alpha_0\sin\beta_1 y+\beta_0(1-\cos\beta_1 y)} = \frac{\alpha_0}{\beta_0}\left[1-\frac{\alpha''(\beta_0+1)}{1+\beta'' y c_2/c_1}\right]$$

$$w+\alpha = \alpha-\alpha_0 + \frac{\alpha_0}{\beta_0}(1+\beta_0)\left(1-\frac{\alpha''}{1+\beta'' y c_2/c_1}\right)$$

(20) $$q = \frac{1}{\gamma}\left[(\alpha-\alpha_0) + \frac{\alpha_0}{\beta'}\left(1-\frac{\alpha''}{1+\beta'' y c_2/c_1}\right)\right]$$

(20a) $$q_0 = \frac{\alpha_0}{\gamma_0\beta'}(1-\alpha'')$$

Pere de q, surbaze de (19) kaj (4), ankaŭ $s = m.\sin\eta$ estas esprimita kiel funkcio de la anomalio y. Tiucele estas bone detaligi la esprimojn por m kaj $\sin\eta$. Oni havas

(21) $$m^2 = \left(1-\frac{C^2}{\zeta_0}\right) + \frac{C^2}{\zeta_0} - \frac{C^2}{\zeta} = m_0^2 + \delta\frac{C^2}{\zeta_0}\cdot\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta\delta}$$

$$\sin\eta = \sin\eta^{o}\cos(\delta\eta') + \cos\eta^{o}\sin(\delta\eta')$$

(22) $$\sin\eta = \sin\eta^{o} + \delta\eta'\cdot\cos\eta^{o}\cdot c_1(\delta\eta') - (\delta\eta')^2\sin\eta^{o}\cdot c_2(\delta\eta')$$

kie c_1, c_2 estas la samaj funkcioj (16), de la nova argumento $\delta\eta'$.

Fine menciu ke por r (resp. por $u = 1/r$) oni povas laŭplaĉe uzi (17) aŭ (7), eventuale ankaŭ

(23) $$\frac{r}{r_0} = \frac{\gamma^2(q^2+1)}{(\gamma q-\alpha)^2+1}$$

ricevebla el (7), kune kun la ligaĵo $w+\alpha = \gamma q$.

2/ LA NULA PROKSIMUMIGO

Surbaze de la trovitaj esprimoj, oni facile trovas la proksimumigon kun $\delta = 0$.

Unue (1), (17) kaj (18) donas tuj

(24) $$\zeta = \zeta_0\,, \quad y = \frac{n(t-t_0)}{1+\alpha' y c_2+\beta' y^2 c_3}\,, \quad r = r_0\,(1+\alpha' y c_1 + \beta' y^2 c_2)$$

Post tio (20) kaj (19) fariĝas

(25) $$q = \frac{\alpha_0}{\gamma_0\beta'}\left(1 - \frac{\alpha''}{1+\beta''\gamma c_2/c_1}\right) , \quad \eta = \eta^0 = \eta''_0 + 2\,\mathrm{arctg}\, q$$

La esprimo por s povas esti donita ankaŭ rekte, kiel

(26) $$\begin{cases} s = m_0 \sin\eta''_0 \cdot \frac{1-q^2}{1+q^2} + m_0 \cos\eta''_0 \cdot \frac{2q}{q^2+1} \\ s = m_0 \cdot \sin\eta''_0 + 2m_0 \frac{q}{q^2+1}(\cos\eta''_0 - q\cdot\sin\eta''_0) \end{cases}$$

Aŭ esprimi ĝin, utiligante la esprimon por η''_0, pli detale per la ekiraj donoj, per kiu vojo venas:

(26a) $$s = s_0 - 2\frac{q'}{1+(q')^2}\left(s_0 q' - \sqrt{m_0^2 - s_0^2}\right) , \quad q' = \frac{q-q_0}{1+qq_0}$$

La solvon pri λ oni trovos poste, ĉar aliaj ekvacioj ne dependas de λ.

Por plifaciligi la unuan kaj la duan proksimumigojn, utiligu la nulan proksimumigon kaj donu al kelkaj kvantoj formon el kiu oni tuj prenos la unuajn du proksimumigojn, se necese ankaŭ la pli altajn.

Unue oni povas skribi

(27) $$\zeta = \zeta_0 + \delta\zeta_1 + \delta^2\zeta_2 + \ldots$$

kaj el (1), (3), (4), kun utiligo ankaŭ (19), trovi

$$d\zeta = -\delta\left(6su + \delta\frac{\partial U_2}{\partial s}\right)\cdot ds = -3\delta u\left[\sin^2\eta \cdot \frac{C^2}{\zeta^2} d\zeta + m^2 \sin 2\eta \cdot d(\eta^0 + \delta\eta')\right] -$$

$$-\delta^2 \cdot \frac{\partial U_2}{\partial s} ds = 3\delta^2 u\left(\frac{C\sin\eta}{\zeta}\right)^2 \cdot \left(6su + \delta\frac{\partial U_2}{\partial s}\right) ds - 3\delta m^2 u \cdot \sin 2\eta\left(\frac{2\,dq}{q^2+1} + \delta d\eta'\right) -$$

$$-\delta^2 \cdot \frac{\partial U_2}{\partial s} ds ,$$

(28) $$d\zeta = -6\delta m^2 u \cdot \sin 2\eta \cdot \frac{dq}{q^2+1} + 6\delta^2 su\left(\frac{3u}{\zeta^2} C^2 \sin^2\eta\, ds - m\cos\eta \cdot d\eta'\right) -$$

$$-\delta^2 \cdot \frac{\partial U_2}{\partial s}\left(1 - 3\delta C^2 \zeta^{-2} u \cdot \sin^2\eta\right) ds$$

La esprimo enhavas neniajn neglektojn.

Ironte de (21) pluen, oni trovos

(29) $$m^2 = m_0^2 + \delta C^2 \zeta_0^{-2} \zeta_1 + \delta^2 C^2 \zeta_0^{-2}\left(\frac{\zeta_0}{\zeta} \cdot \frac{\zeta - \zeta_0 - \delta\zeta_1}{\delta^2} - \frac{\zeta_1}{\zeta} \cdot \frac{\zeta - \zeta_0}{\delta}\right)$$

Tre grava estas la diferenco

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{\gamma_0^2 - \gamma^2}{\alpha + \alpha_0} = \frac{\zeta_0^* - \zeta^*}{-r_0^2 h(\alpha + \alpha_0)} = \frac{\delta}{r_0^2 h}\left(\frac{\zeta - \zeta_0}{\delta} + U_1 - U_1(0)\right) \cdot \frac{1}{\alpha + \alpha_0}$$

(30) $$\alpha - \alpha_0 = \frac{\delta}{r_0^2 h}\left[\zeta_1 + u(3s^2 - 1) - u_0(3s_0^2 - 1)\right]\left(\frac{1}{2\alpha_0} + \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha + \alpha_0}\right) +$$

$$+ \frac{\delta^2}{r_0^2 h}\left[\frac{\zeta - \zeta_0 - \delta\zeta_1}{\delta^2} + U_2 - U_2(0)\right] \frac{1}{\alpha + \alpha_0}$$

Pro la valoro de u el (23)

$$r_0 u = \frac{(q^2-2\sigma q)\gamma^2+\alpha^2+1}{(q^2+1)\gamma^2}$$

ni bezonas

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\sigma^2-\sigma_0^2}{\sigma+\sigma_0} = \sigma_0 + \frac{(-r_0^2 h)(1+2\beta_0)}{\sigma+\sigma_0}\cdot\frac{\zeta_0-\zeta^*}{\zeta_0\zeta^*}$$

(31) $$\sigma = \sigma_0 - \delta\cdot\frac{1+2\beta_0}{\gamma^2\zeta_0(\sigma+\sigma_0)}\left(\frac{\zeta-\zeta_0}{\delta}+U_1\right)$$

$$\frac{\alpha^2+1}{\gamma^2} = \frac{2\mu r_0-\zeta^*}{\zeta^*} = \frac{2\mu r_0-\zeta_0}{\zeta_0} - \frac{2\mu r_0(\zeta^*-\zeta_0)}{\zeta_0\zeta^*}$$

(32) $$\frac{\alpha^2+1}{\gamma^2} = \beta_2 - \delta\cdot\frac{2\mu r_0}{\zeta_0\zeta^*}\left(\frac{\zeta-\zeta_0}{\delta}+U_1\right)$$

Pro tio

(33) $$\begin{cases} u = u^0+\delta u^1, \quad r_0 u^0 = \dfrac{q^2-2\sigma_0 q+\beta_2}{q^2+1} \\ r_0 u^1 = \dfrac{2}{\zeta^*}\left[\dfrac{1+2\beta_0}{\gamma_0^2(\sigma+\sigma_0)}\cdot\dfrac{q}{q^2+1} - \dfrac{\mu r_0}{\zeta_0(q^2+1)}\right]\left(\dfrac{\zeta-\zeta_0}{\delta}+U_1\right) \end{cases}$$

Estos utila ankaŭ la esprimo por du, nome el (23) devenas

$$r_0 du = 2\frac{(\gamma q-\alpha)(\gamma+q\alpha)-q}{\gamma^2(q^2+1)^2}\cdot\frac{dq}{\gamma^2} + 2\frac{(\gamma q-\alpha)\alpha-1}{\gamma^3(q^2+1)}d\gamma - \frac{\gamma q-\alpha}{\alpha\gamma^2(q^2+1)}\cdot 2\alpha d\alpha =$$

$$= 2\frac{(q^2-1)\alpha\gamma+q(2\beta_0-2\alpha^2)}{\gamma^2(q^2+1)^2}dq + 2\frac{\alpha^2\gamma q-\alpha^3-\alpha+\gamma^3 q-\alpha\gamma^2}{\alpha\gamma^3(q^2+1)}d\gamma$$

(33a) $$r_0 du = 2\sigma\cdot\frac{q^2+2\tau q-1}{(q^2+1)^2}dq + \delta\cdot\frac{q(1+2\beta_0)-2\sigma(1+\beta_0)}{\alpha\gamma\zeta^*(q^2+1)}\cdot\frac{\partial U_1}{\partial u}du$$

Per tio oni povas iom detaligi ankaŭ la esprimon (19) por η', nome

(19a) $$\eta' = -\int\frac{1}{\delta}\left(\sqrt{1+\frac{\delta}{\zeta}U_1}-1\right)d\eta + 2\int Y\frac{dq}{q^2+1} -$$

$$-\frac{2}{r_0}\int(1+\delta Y)\frac{q(1+2\beta_0)-2\sigma(1+\beta_0)}{\alpha\gamma\zeta^*(q^2+1)^2}\cdot\frac{\partial U_1}{\partial u}dq -$$

$$-\frac{\delta}{r_0}\int(1+\delta Y)\frac{\left[q(1+2\beta_0)-2\sigma(1+\beta_0)\right]^2}{\alpha^3\gamma(\zeta^*)^2(q^2+1)}\left(\frac{\partial U_1}{\partial u}\right)^2\frac{du}{q^2+2\tau q-1}$$

3/ LA UNUA PROKSIMUMIGO

Kiam temas pri la unua proksimumigo, en (28) restas nur la unua membro, kie ĉiuj funkcioj estos prenataj en la nula proksimumigo, do

$$d\zeta = -6\frac{\delta}{r_0}m_0^2\,(q^2-2\sigma_0 q+\beta_2)\left[\sin 2\eta_0''\cdot\frac{q^4-6q^2+1}{(q^2+1)^2}+\cos 2\eta_0''\cdot\frac{4q(1-q^2)}{(q^2+1)^2}\right]\frac{dq}{(q^2+1)^2}$$

La integrigo fluos nur laŭ la variablo q, ĉar ĉio alia estas nur konstantoj. Temas pri integrigo de nur algebraj racionalaj funkcioj, kies integrigo, kun la signo ζ_1 el (27), donas

$$(34)\qquad \zeta_1 = 2\frac{m_0^2}{r_0}\cdot\frac{\sin 2\eta''}{(q^2+1)^3}\left[\sigma_0-3\beta_2 q+6\sigma_0 q^2-(1-\beta_2)q^3-3\sigma_0 q^4+3q^5\right]_{q_0}^{q}$$
$$-2\frac{m_0^2}{r_0}\cdot\frac{\cos 2\eta''}{(q^2+1)^3}\left[6q^4-8\sigma_0 q^3+3(\beta_2+1)q^2+(1-\beta_2)\right]_{q_0}^{q}$$

La unua proksimumigo de r estas trovebla el (18), kun la unua membro de $\alpha-\alpha_0$ el (30). Neniu nova integrigo estas bezonata, sed oni devas koni la unuan proksimumigon por la anomalio y. Kaj en la esprimo (17) por y aperas la integralo J, kiu ĉi tie estas bezonata kun la nula proksimumigo. Por trovi ĝin, en (13) enkonduku q, per la rilatajo $w+\alpha=\gamma q$, utiligante por u kaj por du la esprimojn el (33) kaj (33a). La integra funkcio fariĝas

$$(3s^2-1)\frac{\gamma q:\alpha^2}{\gamma^2(q^2-1)+2\gamma q(\beta_0\alpha^{-2}-1)}\cdot\frac{2\sigma_0(q^2+2\tau_0 q-1)}{(q^2+1)^2}dq = (3s^2-1)\frac{\gamma q}{(q^2+1)^2}\cdot\frac{2\sigma_0}{\gamma^2}dq$$

ĉar la kalkulo de la nulaj valoroj de la koeficientoj montras ke oni povas redukti la frakcion per la kvadrata trinomo $q^2-1+2\tau_0 q$. Uzinte pluen la nulajn koeficientojn kaj la nulan proksimiĝon por

$$3s^2-1 = \frac{3}{2}m_0^2(1-\cos 2\eta^{\circ})-1 = \frac{3}{2}m_0^2-1-\frac{3}{2}m_0^2\left[\cos 2\eta_0''\left(1-\frac{8q^2}{(q^2+1)^2}\right)-\sin 2\eta_0''\cdot\frac{4q(1-q^2)}{(q^2+1)^2}\right]$$

do

$$(35)\qquad (3s^2-1)_{\circ} = 3m_0^2\sin^2\eta_0''-1+\frac{6m_0^2 q}{(q^2+1)^2}\left[2q\cos 2\eta_0''+(1-q^2)\sin 2\eta_0''\right]$$

oni povas skribi

$$J = -(\mu r_0\beta_1)^{-1}\cdot\frac{2\sigma_0}{\gamma_0}\int\frac{q\,dq}{(q^2+1)^2}\left[(3m_0^2\sin^2\eta_0''-1)+6m_0^2\left(2q\cos 2\eta_0''+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(1-q^2)\sin 2\eta_0''\right)\frac{q}{(q^2+1)^2}\right] = (\mu r_0\beta_1^3)^{-1}\alpha_0\gamma_0^{-2}\left[(3m_0^2\sin^2\eta_0''-1)\frac{1}{q^2+1}+\right.$$
$$\left.+2m_0^2\cdot\frac{3q^2+1}{(q^2+1)^3}\cos 2\eta_0''-m_0^2\frac{4q^3}{(q^2+1)^3}\sin 2\eta_0''\right]_{q_0}^{q}$$

kaj fine

$$(36)\qquad J = \frac{\alpha_0}{2\beta_1\zeta_0}\left[(3m_0^2-2)\frac{1}{q^2+1}-m_0^2\{(3q^4-6q^2-1)\cos 2\eta_0''+\right.$$
$$\left.+8q^3\sin 2\eta_0''\}\frac{1}{(q^2+1)^3}\right]_{q_0}^{q}$$

Restas ankoraŭ trovi la unuan proksimumigon por s, resp. por η.

Oni trovas ĝin el (22), konsiderante (19°) kaj (19a). La esenco de la kalkulo estas $\delta\eta'$ en la unua proksimumigo, sekve η' en la nula proksimumigo. La unuaj paŝoj, kun (6) por Y, donas

$$\eta' = -\int\frac{U_1}{2\zeta}d\eta + 6\frac{C^2}{\zeta_0^2}\int u\sin^2\eta\frac{dq}{q^2+1} - \int\frac{q(1+2\beta_0)-2\sigma(1+\beta_0)}{\alpha^2\zeta_0}\cdot\frac{(3s^2-1)2\sigma_0}{r_0(q^2+1)^2}dq =$$

$$= \frac{1}{\zeta_0}\int u^o\left[6(1-m_0^2)\sin^2\eta^o-(3m_0^2\sin^2\eta^o-1)\right]\frac{dq}{q^2+1} -$$

$$-\frac{2}{\alpha_0\gamma_0\zeta_0}\int(3s^2-1)_o\frac{q(1+2\beta_0)-2\sigma(1+\beta_0)}{r_0(q^2+1)^2}dq = \frac{8-9m_0^2}{2\zeta_0 r_0}\int\frac{q^2-2\sigma_0 q+\beta_2}{(q^2+1)^2}dq +$$

$$+\frac{2-3m_0^2}{r_0\alpha_0\gamma_0\zeta_0}\int\left[q(1+2\beta_0)-2\sigma_0(1+\beta_0)\right](q^2+1)^{-2}dq-(2r_0\zeta_0)^{-1}\int\left[(6-9m_0^2)(q^2-2\sigma_0 q+\right.$$

$$\left.+\beta_2)-3m_0^2(\alpha_0\gamma_0)^{-1}\{q(1+2\beta_0)-2\sigma_0(1+\beta_0)\}\right]\left[(q^4-6q^2+1)\cos 2\eta_0''-4q(1-q^2)\sin 2\eta_0''\right](q^2+1)^{-4}dq$$

La unua integralo fariĝas

$$\frac{\sigma_0+\frac{1}{2}(1+\beta_2)q-q}{q^2+1} + \frac{1}{2}(\beta_2+1)\operatorname{arc\,tg} q$$

kaj la dua integralo

$$-\sigma_0(1+\beta_0)\operatorname{arc\,tg} q - \frac{1}{2}\,\frac{(1+2\beta_0)+2\sigma_0(1+\beta_0)q}{q^2+1}$$

kune

$$B_0\operatorname{arc\,tg} q + \frac{A_0+(B_0-C_0)q}{q^2+1}$$

(37) $$A_0 = \sigma_0 - \frac{(2-3m_0^2)(1+2\beta_0)}{2\alpha_0 r_0\gamma_0\zeta_0}, \quad B_0 = \mu\frac{4-3m_0^2}{2\zeta_0^2}, \quad C_0 = \frac{8-9m_0^2}{2r_0\zeta_0}$$

Integrinte la partojn kun $\cos 2\eta_0''$ kaj kun $\sin 2\eta_0''$, oni trovas la finan formon

(38) $$\eta' = B_0\operatorname{arc\,tg} q + \frac{A_0+(B_0-C_0)q}{q^2+1} + (12r_0\zeta_0)^{-1}(q^2+1)^{-3}\{\left[B_1+6C_1 q+\right.$$

$$\left.+6B_1 q^2+2(A_1-C_1)q^3-3B_1 q^4+6A_1 q^5\right]\cos 2\eta_0'' - 2\left[A_1-C_1+3(A_1+C_1)q^2+4B_1 q^3+\right.$$

$$\left.+6A_1 q^4\right]\sin 2\eta_0''\}\Big|_{q_0}^{q}$$

$$A_1 = -3(2-3m_0^2), \quad B_1 = -2\sigma_0 A_1+3m_0^2\left(\frac{\alpha_0}{\gamma_0}+\frac{\gamma_0}{\alpha_0}\right), \quad C_1 = \beta_2 A_1+3m_0^2(1+\beta_2)$$

4/ LA DUA PROKSIMUMIGO

Por havi ζ en la dua proksimumigo, ni devas en (28) preni la kvantojn el la unua membro kun la unua proksimumigo kaj el la ceteraj membroj kun la nula proksimumigo. Jam estas kalkulita ζ, kiel (24), pro kio restas por integri - kun utiligo de (29), (33), ankaŭ (19a) - la esprimon:

$$-6\frac{dq}{q^2+1}(m_0^2u^o\cdot 2\eta'\cos 2\eta^o+m^2\sin 2\eta\cdot u^1+u\sin 2\eta\cdot C^2\zeta_0^{-2}\zeta_1)\ +$$

$$+\ 6su(3uC^2\zeta^{-2}\sin^2\eta\, ds-m\cos\eta d\eta')-\frac{\partial U_2}{\partial s}ds\ =\ -12m_0^2u^o\eta'\cdot\cos 2\eta^o\ \frac{dq}{q^2+1}\ -$$

$$-6m_0^2\sin 2\eta^o\cdot\frac{2}{r_0\zeta_0}\cdot\frac{\zeta_0(1+2\beta_0)q-2\alpha_0\gamma_0\mu r_0}{2\alpha_0\gamma_0\zeta_0(q^2+1)^2}\left[\zeta_1+u^o(3s^2-1)_o\right]dq\ -$$

$$-\frac{6C^2}{r_0\zeta_0^2}\sin 2\eta^o\ \frac{q^2-2\sigma_0q+\beta_2}{(q^2+1)^2}\zeta_1dq+6m_0^2u^o\sin\eta^o\cos\eta^o\left[\frac{1}{2\zeta_0}u^o(3s^2-1)_o\,d\eta^o\ +\right.$$

$$\left.+\ \frac{q(1+2\beta_0)-2\sigma_0(1+\beta_0)}{\alpha_0\gamma_0\zeta_0(q^2+1)^2}\cdot\frac{2}{r_0}(3s^2-1)_o\,dq\right]\ -\ 2m_0\sum_k j_ku^{k-1}P_k'(s)\cos\eta^o d\eta^o\ .$$

Konsiderinte la parton sen η_0'' el (38) por η' kaj aldoninte la saman parton el la unua membro de la lasta krampo, oni trovas la membrojn

$$\frac{3m_0^2}{r_0}\left[-4\cos 2\eta_0''\left(B_0\,\mathrm{arc\,tg}\,q+\frac{A_0+(B_0-C_0)q}{q^2+1}\right)\ +\right.$$

$$\left.+(3m_0^2-2)\frac{\sin 2\eta_0''}{2r_0\zeta_0}\cdot\frac{q^2-2\sigma_0q+\beta_2}{q^2+1}\right]\frac{q^2-2\sigma_0q+\beta_2}{(q^2+1)^2}\ dq$$

Kun parta integrigo kaj la malsupre indikotaj mallongigoj ili estos

$$4m_0^2r_0^{-1}\left(\cos 2\eta_0''B_0QdM_1+\sin 2\eta_0''B_0QdM_2\right)\ +\ 3m_0^2(2r_0^2\zeta_0)^{-1}\left(M_3\cos 2\eta_0''+\right.$$

$$\left.+M_4\sin 2\eta_0''\right)\frac{q^2-2\sigma_0q+\beta_2}{(q^2+1)^5}\ dq$$

$$(39)\qquad \begin{cases} Q\ =\ \mathrm{arc\,tg}\,q \\ (q^2+1)^3M_1=\ \sigma_0-3\beta_2q+6\sigma_0q^2-(1-\beta_2)q^3-3\sigma_0q^4-3q^5 \\ (q^2+1)^3M_2=\ 1-\beta_2+3(1+\beta_2)q^2-8\sigma_0q^3+6q^4 \\ M_3=\ -8r_0\zeta_0(q^4-6q^2+1)\left[A_0+(B_0-C_0)q\right]+(3m_0^2-2)4q(1-q^2)(q^2-2\sigma_0q+\beta_2) \\ M_4=\ 32q(1-q^2)r_0\zeta_0\left[A_0+(B_0-C_0)q\right]+(3m_0^2-2)(q^4-6q^2+1)(q^2-2\sigma_0q+\beta_2) \end{cases}$$

Signu ankoraŭ, provizore per η_s', η_c', la esprimojn apud $\sin 2\eta_0''$ kaj $\cos 2\eta_0''$ en (38), same per ζ_s, ζ_c en (34), ni havos entute

$$(40)\qquad \zeta_2\ =\ 4m_0^2r_0^{-1}B_0\left[Q(M_1\cos 2\eta_0''+M_2\sin 2\eta_0'')\ -\ \int(q^2+1)^{-1}(M_1\cos 2\eta_0''\ +\right.$$

$$\left.+M_2\sin 2\eta_0'')dq\right]+3m_0^2(2r_0^2\zeta_0)^{-1}\int(q^2+1)^{-5}(M_3\cos 2\eta_0''+M_4\sin 2\eta_0'')(q^2-2\sigma_0q+\beta_2)dq-$$

$$-6m_0^2\int(\eta_c'\cos 4Q-\eta_s'\sin 4Q)\frac{u^o}{q^2+1}dq-6m_0^2\sin 4\eta_0''\int(\eta_s'\cos 4Q-\eta_c'\sin 4Q)\frac{u^o}{q^2+1}dq\ -$$

$$-6m_0^2\cos 4\eta_0''\int(\eta_s'\sin 4Q+\eta_c'\cos 4Q)\frac{u^o}{q^2+1}dq\ -3(r_0\zeta_0)^{-1}\int(\zeta_s\cos 4Q+\zeta_c\sin 4Q)M_5(q^2+1)^{-2}dq-$$

$$-3(r_0\zeta_0)^{-1}\sin 4\eta_0''\int(\zeta_s\sin 4Q+\zeta_c\cos 4Q)M_5(q^2+1)^{-2}dq+3(r_0\zeta_0)^{-1}\cos 4\eta_0''\int(\zeta_s\cos 4Q-$$

$$-\zeta_c \sin 4Q) M_s (q^2+1)^{-2} dq - 9m_0^2 (2\zeta_0)^{-1} \int (\sin 4\eta_0'' \cos 8Q + \cos 4\eta_0'' \sin 8Q) \cdot \frac{(u^o)^2}{q^2+1} dq -$$

$$-2m_0 \sum_3^\infty j_k \int (u^o)^{k-1} P_k'(m_0 \sin\eta^o) \cos\eta^o d\eta^o$$

$$(41) \quad \begin{cases} M_s = \dfrac{m_0^2}{\alpha_0 \gamma_0}(1+2\beta_0) q - \dfrac{2\mu r_0}{\zeta_0} + \dfrac{C^2}{\zeta_0}(q^2 - 2\sigma_0 q + \beta_2) \\ \eta_c' = (12 r_0 \zeta_0)^{-1} (q^2+1)^{-3} \left[B_1 + 6C_1 q + 6B_1 q^2 + 2(A_1 - C_1) q^3 - 3B_1 q^4 + 6A_1 q^5 \right]_{q_0}^{q} \\ \eta_s' = -2(12 r_0 \zeta_0)^{-1} (q^2+1)^{-3} \left[A_1 - C_1 + 3(A_1 + C_1) q^2 + 4B_1 q^3 + 6A_1 q^4 \right]_{q_0}^{q} \\ \zeta_c = -2m_0^2 r_0^{-1} (q^2+1)^{-3} \left[(1-\beta_2) + 3(1+\beta_2) q^2 - 8\sigma_0 q^3 + 6q^4 \right]_{q_0}^{q} \\ \zeta_s = 2m_0^2 r_0^{-1} (q^2+1)^{-3} \left[\sigma_0 - 3\beta_2 q + 6\sigma_0 q^2 - (1-\beta_2) q^3 - 3\sigma_0 q^4 + 3q^5 \right]_{q_0}^{q} \end{cases}$$

La duan proksimumigon al s, resp. al η, oni havos se oni trovos unue la unuan proksimumigon al η' el (19a), helpe de (35), (31), (33a) - tiel ni havos

$$(42) \quad d\eta_1' = -(2\zeta_0)^{-1} u^o (3s^2-1)_o d\eta_0' - (2\zeta_0)^{-2} \Big[\zeta_0 u^o (6C^2 \zeta_0^{-2} \zeta_1 \sin^2\eta^o +$$

$$+ 3m_0^2 \eta_0' \sin 2\eta^o) + 2(3s^2-1)_o (\zeta_0 u^1 - \zeta_1 u^o) + 2\zeta_0 U_2 - \tfrac{1}{2}(u^o)^2 \cdot (3s^2-1)_o^2 \Big] d\eta^o +$$

$$+ (C/\zeta_0)^{-2} \Big[6\zeta_0^{-1} (\zeta_0 u^1 - 2\zeta_1 u^o) \sin^2\eta^o + 3\eta_0' u^o \sin 2\eta^o + (2m_0)^{-1} \sin\eta^o \cdot \frac{\partial U_2}{\partial s} \Big] \frac{dq}{q^2+1} -$$

$$- (r_0 \alpha_0 \gamma_0 \zeta_0)^{-1} (q^2+1)^{-2} \Big[q(1+2\beta_0) - 2\sigma_0 (1+\beta_0) \Big] \Big[2Y(3s^2-1)_o + 6C^2 \zeta_0^{-2} \zeta_1 \sin^2\eta^o +$$

$$+ 3m_0^2 \eta_0' \sin 2\eta^o \Big] dq - \frac{2(3s^2-1)_o}{r_0 (q^2+1)^2} \Big[\frac{q(1+2\beta_0)^2}{2\alpha_0^3 \gamma_0 \zeta_0^2} \big(\zeta_1 + U_1 - U_1(0) \big) -$$

$$-2 \frac{q(1+2\beta_0) - 2\sigma_0 (1+\beta_0)}{\alpha_0 \gamma_0 \zeta_0^2} (\zeta_1 + U_1) \Big] dq - \frac{2}{r_0} \Big[\frac{q(1+2\beta_0) - 2\sigma_0 (1+\beta_0)}{\alpha_0 \gamma_0 \zeta_0} (3s^2-1)_o \Big]^2 \frac{dq}{(q^2+1)^3}$$

Laŭ (29), en la dua proksimumigo estos

$$m^2 = m_0^2 + \delta C^2 \zeta_0^{-2} \zeta_1 + \delta^2 C^2 \zeta_0^{-3} (\zeta_0 \zeta_2 - \zeta_1^2)$$

kaj tio sufiĉas, post integrigo de (42), esprimi $s \equiv m \sin(\eta^o + \delta\eta_0' + \delta^2 \eta_1')$ kiel funkcion de q. La kvanto q estas esprimita per (20) kaj y per (17), se oni prenas la duan proksimumigon por $\alpha - \alpha_0$ el (30) kaj J el (13); Enkondukinte q en J per $w + \alpha = \gamma q$ kaj konsiderinte la esprimon (33a) por du, ni havos

$$(43) \quad J = \int \Big(3s^2 - 1 + \delta \frac{\partial U_2}{\partial u} \Big) \frac{2q}{r_0 \alpha^2 \gamma} \Big[\sigma + \delta \cdot \frac{q(1+2\beta_0) - 2\sigma(1+\beta_0)}{r_0 \gamma^2 \zeta^* (q^2+1)} \cdot \frac{\partial U_1}{\partial u} \Big] \frac{dq}{(q^2+1)^2}$$

De tie la unua proksimumigo, utiligante ankaŭ (29), (30), (31), estos

$$(44) \quad J^{(1)} = \frac{1-2\sigma_0^2}{r_0 \zeta_0 \alpha_0^2} \int (3s^2-1)_o \big[\zeta_1 + U_1 - U_1(0) \big] \frac{q\, dq}{(q^2+1)^2} +$$

$$+\frac{3}{r_0\alpha_0\gamma_0^2}\int(2C^2\zeta_0^{-2}\zeta_1\sin^2\eta^{\circ}+m_0^2\eta_0'\sin 2\eta^{\circ})(q^2+1)^{-2}q\,dq+$$

$$+\frac{2}{r_0\alpha_0\gamma_0^2}\int\frac{\partial U_2}{\partial u}\cdot\frac{q\,dq}{(q^2+1)^2}-\frac{2h}{\alpha_0^2\gamma_0\zeta_0^2}\int(3s^2-1)_0^2\frac{q(1+2\beta_0)-2\sigma_0(1+\beta_0)}{(q^2+1)^3}q\,dq$$

Trovi la integralojn (42) kaj (44) estas longa sed pure kalkula laboro, facile efektivigebla en la kazo ke la metodo trovos aplikon.

5/ LA KALKULO DE λ

Por fini la verkon, restas la ekvacio por λ en (1); Oni povas integri ĝin kun tia proksimumigo kun kia estas konataj u,s,ζ. Fakte (1), kun (4) kaj (5), donas

$$d\lambda=C\frac{u^2}{1-s^2}\,dt=\frac{C}{1-s^2}\cdot\frac{ds}{\sqrt{\zeta(1-s^2)-C^2}}=\frac{C}{\sqrt{\zeta}}\cdot\frac{m\cos\eta\,d\eta+\sin\eta\,dm}{m\cos\eta(1-m^2\sin^2\eta)}=$$

$$=\frac{C}{\sqrt{\zeta}}\cdot\frac{d(\mathrm{tg}\eta)}{1+\frac{1}{\zeta}C^2\mathrm{tg}^2\eta}+\frac{C^3\mathrm{tg}\eta\,d\zeta}{2m^2\zeta^2\sqrt{\zeta}(1-m^2\sin^2\eta)}=\frac{dT}{1+T^2}+\frac{T}{1+T^2}\cdot\frac{d\zeta}{2\zeta}+$$

$$+\frac{C^2T(1+\mathrm{tg}^2\eta)d\zeta}{2m^2\zeta^2(1+T^2)},\qquad T=\frac{C}{\sqrt{\zeta}}\mathrm{tg}\,\eta$$

El tio sekvas la nula proksimumigo kaj la preparo por aliaj proksimumigoj en la formo

$$d(\lambda-\mathrm{arctg}T)=T\frac{m^2+C^2/\zeta+T^2}{2m^2\zeta(1+T^2)}d\zeta=\frac{-T\delta}{2m^2\zeta}\cdot\frac{\partial U_1}{\partial s}ds=-\frac{3\delta uT}{m^2\zeta}s\,ds-$$

$$-\frac{\delta^2}{2m^2\zeta}T\frac{\partial U_2}{\partial s}ds$$

do

$$(45)\qquad \lambda=\lambda_0+\mathrm{arctg}T\Big|_{t_0}^{t}-3\delta C\int_{t_0}^{t}\frac{u}{\zeta\sqrt{\zeta}}\sin^2\eta\,d\eta-3\delta\int_{t_0}^{t}\frac{uT}{m\zeta}\sin^2\eta\,dm-$$

$$-\frac{1}{2}\delta^2\int_{t_0}^{t}\frac{T}{m^2\zeta}\cdot\frac{\partial U_2}{\partial s}ds\ ,\quad T=\frac{C}{\sqrt{\zeta}}\mathrm{tg}\,\eta$$

Pro (33) kaj pro (19°), la unua proksimumigo estos

$$(46)\qquad \frac{-3C}{\zeta_0\sqrt{\zeta_0}}\int\frac{q^2-2\sigma_0q+\beta_2}{q^2+1}(1-\cos 2\eta^{\circ})\frac{dq}{q^2+1}=\frac{-3C}{\zeta_0\sqrt{\zeta_0}}\left[\frac{\sigma_0-\frac{1}{2}(1-\beta_2)q}{q^2+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(1+\beta_2)Q\right]-C\zeta_0^{-3/2}\cos 2\eta_0''(q^2+1)^{-3}\left[\sigma_0-3\beta_2q+6\sigma_0q^2-(1-\beta_2)q^3-3\sigma_0q^4+3q^5\right]-$$

$$-C\zeta_0^{-3/2}\sin 2\eta_0''(q^2+1)^{-3}\left[1-\beta_2+3(1+\beta_2)q^2-8\sigma_0q^3+6q^4\right]_{q_0}^{q}$$

Por la dua proksimumigo restas

$$(47)\qquad -3C\zeta_0^{-5/2}\int \sin^2\eta^o(\zeta_0 u^1 - \tfrac{3}{2}\zeta_1 u^o)\,d\eta^o - \tfrac{3}{2}C\zeta_0^{-3/2}\int u^o\Big[\sin 2\eta^o\, 2\eta'\cdot d\eta^o + (1-\cos 2\eta^o)\,d\eta'\Big] + \tfrac{3}{2}C^3 m_0^{-2}\zeta_0^{-5/2}\int u^o \operatorname{tg}\eta^o \sin^2\eta^o\cdot\frac{\partial U_1}{\partial s}ds - \frac{C}{2m_0}\zeta_0^{-3/2}\int \sin\eta^o\cdot\frac{\partial U_2}{\partial s}d\eta^o.$$

Oni devas enmeti η^o el (19°), u^o kaj u^1 el (33), ζ_1 el (34), η' el (38), $d\eta'$ el (19), U_1 kaj U_2 el (4), fine $s = m_0\cdot\sin\eta^o$ kaj oni povas per iom rutina kalkulo integri ĉi tiujn esprimojn kiel funkcioj de q, se la metodo montriĝos praktika.

RIMARKO

La avantaĝo de la metodo estas ne nur en tio ke nenie aperas iaj ajn sekulaj membroj, sed ankaŭ ke ĝi estas aplikebla por ĉiuspecaj orbitoj. Danke al ĉiama realeco de la funkcioj (16), la anomalio y estas ĉiam reala. Pro tio ĉio estas kalkulebla samvoje, senkonsidere ĉu la nula alproksimiĝo prezentas elipson, hiperbolon aŭ parabolon - nenion oni devas ŝanĝi eĉ ĉe la transiro de la elipsa al la hiperbola orbito (kaj inverse). La diverseco de la orbito povas respeguliĝi nur en pli aŭ malpli rapida konverĝo de la serioj por la funkcioj (16); sed la kalkulvojo restas ĉiam la sama - la metodo estas do universala.

LA MENCIITA LITERATURO

[1a] Popovič B., *Kretanje satelita oko osnosimetrične planete* (Moviĝo de satelito ĉirkau aksosimetria planedo) ZBORNIK 1966/67 Tehničkog fakulteta u Nišu, 1968., pp.5-19.

[1b] Popovič B., Движение сателита около осесимметричной планеты, XVIII International Astronautical Congress, Belgrade 1967., (Pergamon Press and Polish Sc.Publishers), 1968., pp.43-55.

[2] Šišović Z., *Modifikacija novih rešenja jednačina kretanja satelita oko osnosimetrične planete*, ZBORNIK 1968/69 Tehničkog fakulteta u Nišu, 1970., pp.61-75.

[3] Stumpff K., *Himmelsmechanik*, I, VEB, Berlin, 1959., čap.V.

[4] Popovič B., *Kalkulado de planed- kaj komet-efemeridoj senpere el iliaj pozicio kaj rapido*, BULLETIN de l'Observatoire astronomique de Belgrade, XXIV (1959), 13-24.