4) Konforme al 2) notu la binomajn nombrojn

$$\binom{n}{m}$$

simple $(n/'m)$, kiun simbolon oni prononcu ankaŭ: n super m.

5) Notu la malsupran, respektive la supran limon de sumo, produto aŭ integraĵo antaŭ, respektive malantaŭ la signo. Kiel integrilo ia se eble iom longa, majuskla S sufiĉos. Metu la signon kun la limoj inter krampoj.

Ekzemploj:

$$(x = 1 \Sigma 4)\ x = 1 + 2 + 3 + 4$$ [4]

$$(x = 1\,\Pi\,3)\ (a + x) = (a + 1)(a + 2)(a + 3)$$ [5]

$$(a \mathrm{S} b)\ x\,dx = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)$$ [6]

(S) $y\,dy = \frac{1}{2} y^2 +$ konstanto (ekzemplo de nedifinita integraĵo).

$(x = a \mathrm{S} b)\ f(x)\ dg(x)$ (ekzemplo de integraĵo laŭ Stieltjes).

6) Skribu limitojn laŭ la ekzemplo: $(z \rightarrow 0 \lim)\ z \log z = 0$ [7].

Tiuj reguloj ebligas la komunikon de la elirpunkto aŭ la rezulto de kalkuloj. Ili ne estas tre konvenaj por montri la kalkulojn mem. Tiuj ĉi tamen estas plej ofte forlasataj en revuoj.

Ne estas nia intenco, ke oni preferu la novajn skribmanierojn ol la kutimajn. Kontraŭe, se eble oni uzu la plej facile legeblajn konvenciajn simbolojn. Por ekscii, kio estas ebla sen tro grandaj ekstraj preskostoj, oni interkonsiliĝu kun la presejestro, se tio ne montriĝas el la presaĵoj de la presejo.

Nia intenco estas nur, ke, se la cirkonstancoj devigas al plisimpligoj, normigita unuforma metodo estu uzata en la estonto.

Proponataj prononcoj:

1) unu [dividita] per a plus bo oble co plus do.
2) a nulo (aŭ: nula) je (en) la noa [potenco].
3) eksponencialo de zo.
4) la sumo de [la termoj] kso por kso de unu ĝis kvar.
5) la produto de [la faktoroj] a plus kso por kso de unu ĝis tri.
6) la integraĵo, de a ĝis bo, de kso laŭ do kso.
7) la limito, por zo iĝas nulo, de zo logaritmo de zo.

517.6

RIMARKOJ PRI LA FUNKCIOJ DE EULER, LA FAKTORA FUNKCIO KAJ LA BINOMAJ NOMBROJ

de J. GILTAY.

1. En siaj „Metodoj de matematika fiziko" la britoj H. kaj B. S.

Jeffreys pledas por la uzo de la faktora funkcio $x!$ anstataŭ la gammafunkcio de Euler. Multaj matematikistoj antaŭe uzis la simbolon $x!$ nur se x estas pozitiva entjero. Efektive, tiukaze la difino de $x!$ povas esti tre simpla:

$$x! = x(x - 1)(x - 2) \ldots 3.2.1, \qquad (1)$$

do: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$ k.t.p.

Verŝajne la funkcio $x!$ dankas al tiu difino la nomon faktora funkcio aŭ faktorialo.

Estas konata afero, kiun ni ne pruvos tie ĉi, ke validas la rilato

$$\Gamma(x + 1) = x!,$$

se x estas pozitiva entjero.

Estas iom ĝene, ke la argumento, kiun oni bezonas plej ofte en la gammafunkcio estas ne x, sed $x + 1$. Pro tio oni ankaŭ uzas la simbolon $\Pi(x)$, difinatan de:

$$\Gamma(x + 1) = \Pi(x),$$

sed la simbolo Π kaŭzas konfuzon kun la tre multe uzata simbolo por diversaj produtoj.

Kiel oni vidas, la plej simpla maniero eviti la malfacilaĵojn estas: uzi la simbolon $x!$ anstataŭ $\Gamma(x + 1)$, ankaŭ en la kazoj de neentjera x kaj de nepozitiva x.

Unu el la plej gravaj ecoj de la gammafunkcio estas esprimata en la funkcia ekvacio:

$$\Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x),$$

kiu nun prenas la formon:

$$x! = x(x - 1)!, \qquad (2)$$

validan por ĉiuj valoroj de x.

Alia grava funkcia ekvacio estas:

$$x!(-x)! = \pi x / \sin \pi x. \qquad (3)$$

Por neentjera x la funkcio $x!$ havas ĝenerale nesimplan valoron. Esceptoj estas la kazoj, en kiuj x estas entjero plus duono, ĉar tiam la valoro estas facile trovata el la laŭbezona aplikado de (2) kaj la rilato:

$$(\tfrac{1}{2})! = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

sekvanta el (2) kaj (3) por $x = \frac{1}{2}$.

Nun ni esploru la valorojn de $0!$, $(-1)!$, $(-2)!$ k.t.p.

Se ni prenas en (2) $x = 1$, ni trovas:

$$1! = 1.0!.$$

Ĉar $1! = 1$, la rezulto estas: $0! = 1$.

Sed se ni prenas en (2) $x = 0$, ni trovas:

$$0! = 0.(-1)!,$$

do $(-1)!$ devas esti infinita. En la sama maniero ankaŭ $(-2)!$, $(-3)!$ k.t.p. montriĝas infinitaj.

2. La betafunkcio de Euler estas funkcio de du grandoj. Oni trovas en la lernolibroj kutime la pruvon pri la rilato:

$$B(p,\ q) = \Gamma(p) \times \Gamma(q) / \Gamma(p+q).$$

kaj iun rimarkon, ke la betafunkcio pro tio ne plu bezonas specialan esploron.

Ĉi tiu rilato transformiĝas en la nova notaĵo (se ni samtempe skribas $p+1$ kaj $q+1$ anstataŭ p kaj q) en:

$$B(p+1,\ q+1) = p!q!/(p+q+1)! \qquad (4)$$

Oni renkontas la betafunkcion nur sur speciala kampo. La inverso de la dua membro de (4) enhavas la faktorojn $p+q+1$ kaj

$$(p+q)!/p!q!$$

el kiuj la dua estas renkontata sur tre multaj kampoj. En la formo

$$r!/p!(r-p)!$$

(ni igis $p+q=r$) ĝi enhavas la tre gravajn binomajn nombrojn.

De nun ni rezervos la literojn n kaj m por entjeroj, kontraŭe al p, q kaj r, kiuj povos prezenti ankaŭ aliajn nombrojn.

La binomaj nombroj aperas en la disvolvoj de la diversaj potencoj de $1+z$ kiel la koeficientoj de la potencoj de z.

La koeficienton de la m-a potenco de z en la disvolvo de $(1+z)^n$ oni kutime nomas „n super m". Oni ankaŭ skribas n super m inter krampoj

$$\binom{n}{m}.$$

Ni uzos la notaĵon $(n/'m)$, por kiu oni vidu la artikolon pri notaĵoj en tiu ĉi kajero (p. 23).

Estas praktike, uzi la simbolon por la binomaj nombroj ankaŭ en la kazo de neentjera potenco de $1+z$. Ni do havas por $|z| < 1$ tute ĝenerale:

$$\begin{aligned}(1+z)^r &= (r/'0) + (r/'1)z + \ldots = \\ &= (m = -\infty\ \Sigma + \infty)(r/'m)z^m, \qquad (5)\end{aligned}$$

en kiu formulo validas:

$$(r/'m) = \{r/1\}\{(r-1)/2\}\{(r-2)/3\} \ldots \{(r-m+1)/m\},$$
$$(m \text{ pozitiva entjero}), \qquad (6a)$$
$$(r/'0) = 1, \qquad (6b)$$
$$(r/'m) = 0,\ (m \text{ negativa entjero}). \qquad (6c)$$

3. La difino de la binomaj nombroj per la formuloj (6) estas malmulte kontentiga pro la fakto, ke tri kazoj devas esti distingataj. Ni montros pli ĝeneralan formulon.

Se en (6) r estas negativa nombro, ekzemple $-q$, la dua membro de (6a) povas esti reskribata jene:

$$(-1)^m\{(q+m-1)/1\}\{(q+m-2)/2\} \ldots \{(q+1)/(m-1)\}\{q/m\},$$

en kiu esprimo la vicordo de la numeratoroj estas renversata kaj la

minussignoj estas transplantataj antaŭen. Oni vidas el tio, ke validas:

$$(r/'m) = (-1)^m(m-r-1/'m) \qquad (7)$$

se m estas pozitiva entjero kaj r estas negativa nombro. Nun el (7) sekvas, se oni igas la tiam pozitivan grandon $m-r-1 = r'$ (do $r = m-r'-1$):

$$(r'/'m) = (-1)^m(m-r'-1/'m) \quad (m \text{ pozitiva}).$$

Tio montras, ke (7) estas ankaŭ ĝusta por pozitiva r.

Se $r=0$, ambaŭ membroj de (7) estas nuloj, kiel sekvas el (6a) por pozitiva m. Por m pozitiva, la rilato (7) do validas por ĉiu valoro de r. Sed el (6b), respektive (6c), sekvas la sama valideco de (7) por $m=0$, respektive m negativa entjero. Do (7) validas por ĉiu reala r kaj ĉiu entjera m.

El (6a) oni facile konkludos, ke almenaŭ por kelkaj valoroj de r kaj m devas validi la rilato:

$$(r/'m) = r!/m!(r-m)!. \qquad (8)$$

Oni vidas facile la validecon de (8) por nenegativa r el (6a), (6b) kaj (6c).

Se r estas negativa, sed ne estas entjero, oni sekvigas el (6a) kaj (7) por pozitiva m:

$$(r/'m) = (-1)^m(m-r-1/'m) = (-1)^m(m-r-1)!/m!(-r-1)!$$

Uzante (3) por $(m-r-1)!$ kaj $(-r-1)!$ oni trovas plu:

$$(r/'m) = \{(-1)^m/m!\}\frac{\{\pi(m-r-1)\sin\pi(m-r-1)/(r+1-m)!\}}{\{\pi(-r-1)\sin\pi(-r-1)/(r+1)!\}}$$

Se, kiel ni supozis, m estas entjero, ni havas

$$(-1)^m \sin\pi(m-r-1)/\sin\pi(-r-1) = 1,$$

$$\begin{aligned}\text{do } (r/'m) &= (m-r-1)(r+1)!/m!(-r-1)(r+1-m)! = \\ &= (r+1-m)(r+1)!/m!(r+1)(r+1-m)! = \\ &= r!/m!(r-m)!\end{aligned}$$

Evidente do (8) validas ankaŭ por negativa neentjera r. Sed se r estas negativa entjero la sinusoj en la antaŭa reduktoprocedo prenas la valoron nulo kaj nedifinita kvociento rezultas. Tiu malfacilaĵo estas forigata per la formulo:

$$(r/'p) = (x \to r \lim)\{x!/p!(x-p)!\} \qquad (9)$$

kiu, kontraŭe al (8), ankaŭ por r negativa entjero (kaj $p=m$) estas identa kun (6), ĉar la kvociento de la sinusoj restas unu en la limito. La transiro al la limito havas efektivan signifon nur se r estas negativa entjero, kaj povus esti forlasata sen aliigo de la valoro de $(r/'p)$ en ĉiuj aliaj kazoj.

Ni povas preni (9) kiel difinon de la „binomnombra" funkcio $(r/'p)$ en kiu p nun povas havi ankaŭ neentjerajn valorojn. Ni tamen supozas ke r kaj p estas realaj nombroj.

La binomnombra funkcio evidente havas la sekvantan rilaton kun la betafunkcio:

$$(r/'p) = (x \rightarrow r \lim)\{1/(x+1)B(p, x-p)\}. \qquad (10)$$

4. Estas rimarkinde, ke la binomaj nombroj (nun difinitaj kiel la valoroj de la binomnombra funkcio por entjeraj valoroj de la du argumentoj) por pozitiva unua argumento montras simetrion, kiu ne ekzistas por negativaj valoroj de la unua argumento. Vidu por tio la tabelon:

$(n/'m)$	$m = -3$	-2	-1	0	1	2	3
$n = -3$	0	0	0	1	-3	6	-10
-2	0	0	0	1	-2	3	-4
-1	0	0	0	1	-1	1	-1
0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
2	0	0	0	1	2	1	0
3	0	0	0	1	3	3	1

La nenulaj nombroj en la malsupra duono de la tabelo troviĝas en la sama vicordo en la triangulo de Pascal. Ankaŭ en tiu triangulo ĉiu vico de nombroj estas simetria. La vicoj por negativa n tamen ne estas simetriaj. Rimarku, ke ĉie en la tabelo iu nombro estas la sumo de la nombro rekte super tiu nombro kaj ties maldekstra najbaro.

La rilato

$$(n/'m) = (n/'n-m),$$

kiun oni facile povus konjekti post (8), estas (tute kiel (8) mem) neĝusta por n negativa, kiel montras la tabelo. Ĝenerale la rilato

$$(r/'p) = (r/'r-p)$$

estas nur ĝusta, se r ne estas negativa entjero. La kaŭzo de tio estas, ke pro la limito en (9) la dua membro de (9) ne estas simetria rilate al p kaj $r-p$.

Ni devas rimarki, ke la difino (9) estas iomete arbitra. Estus ankaŭ eble difini $(r/'p)$ kiel:

$$(x \rightarrow r \lim)\{x!/(x-r+p)!(r-p)!\}.$$

Al tiu difino ni estus venintaj, se ni estus prenintaj la disvolvon de $(1+z)^r$, kiu konverĝas ĉiam por $|z| > 1$. Ĉar tiam validas

$$(1+z)^r = z^r(1+1/z)^r = (r/'0)z^r + (r/'1)z^{r-1} + \dots$$

En tiu disvolvo la koeficiento de z^m estas $(r/'r-m)$. Oni vidas, ke por r pozitiva entjero la du disvolvoj estas identaj.

Estas nia opinio, ke estas praktike, ligi la difinon de $(r/'p)$ al la pli simpla kaj pli ofte uzata unua disvolvo.

(048.6)=089.2
539.501:413.164=089.2

ESPERANTO EN LA SCIENCO.

Antaŭ unu jaro mi raportis en ESPERANTO (de IEL-UEA) pri sukceso kaj malsukceso en klopodoj enkonduki nian lingvon en sciencaj gazetoj en Nederlando. En la fino de 1947 la Sekcio Matematiko kaj Natursciencoj de la Reĝa Nederlanda Akademio de Sciencoj akceptis proponon de kelkaj siaj membroj (la profesoroj A. F. Holleman, M. Minnaert, J. Clay, kaj J. M. Burgers, kaj eble ankoraŭ aliaj) allasi en siajn *Proceedings* esperantlingvajn resumojn. Prof. Burgers (Delft) en la pasinta jaro regule uzis tiun novan eblon. Jus denove aperis du artikoloj de prof. Burgers. La sama scienculo, en kunlaboro kun angla scienculo, Scott Blair, preparas raporton pri la nomenklaturo reologia. Prof. Burgers intencas proponi aldonon de esperantlingvaj terminoj. Tial mi turnas min speciale al tiuj fizikistoj kaj kemiistoj esperantistaj, kiuj kredas sin iom kompetentaj en la kampo reologia. Ili bonvolu anonci sin ĉe la redaktoro, por ke tiu povu sendi al ili por kritiko provizoran terminaron.

La Redaktoro.

342.843 + 06.044.123 + 06.052.3

VOĈDONADOJ KAJ ILIAJ REZULTOJ

de W. P. ROELOFS.

Enkonduko. — Tiuj inter ni, kiuj estas civitanoj de „demokratia" ŝtato, ĉu „popoldemokratia", ĉu „okcidente demokratia", de tempo al tempo estas vokataj al voĉdono — almenaŭ se ili ne estas ekskluditaj de tiu rajto pro la koloro de sia haŭto aŭ eĉ pro tiu de unu el siaj praavoj, aŭ pro tio ke ili estas tro malriĉaj, aŭ apartenas al senrajtigita klaso — por elekti ĉu parlamenton, aŭ komunumestraron, aŭ soveton, aŭ ŝtatprezidanton, aŭ ion similan.

Ni estas membroj de societoj, kaj de tempo al tempo ni devas elekti estraranojn, aŭ ni devas, per voĉdono, decidi pri certaj aferoj; mallonge: ni devas elekti el inter pluraj alternativoj.

Kaj kiaj estas la rezultoj de tiaj voĉdonoj? Ĉu ili estas konformaj al tio, kio ili devas esti? Ĉi tiu demando kondukas al nova demando: Kio devas esti rezulto de tia voĉdonado? Nu, la tasko de parlamento aŭ simila reprezentantaro estas: reprezenti nin, en nia nomo decidi pri la politiko, fari leĝojn, kaj kontroli, ĉu la rezultoj de ni postulitaj estas liverataj de la plenuma potenco. Do klare estas ke tia parlamento devas esti vere reprezenta, ke ĉiuj pli-malpli gravaj opinioj, konceptoj, principoj, interesoj, deziroj, ktp., kiuj vivas en la popolo kaj havas ian rila-