Pri eble religiaj aŭ magiaj aferoj

Por iuj indiĝenoj, la fekaĵoj de bovoj ŝajne havas religian signifon; tial en certaj indianaj lokoj oni povas aĉeti tiajn aferojn speciale parfumitajn. Alia ekzemplo de ilia (eble spirita) signifo estas la lastatempa forŝtelado de fekaĵoj el la reĝa bovejo de Svazilando, supoze por ke s-ro *Mgabhi Dlarnini*, prezidanto de la Asemblejo, uzu ilin por iu magia celo.

Je la komenco de tiu ĉi artikolo mi citis el la antikva egipta "Libro de la Mortoj". Fine, ĉi tie mi citas el la hebrea Biblio (Readmono 23, 12-13, laŭ la traduko de *L.L.Zamenhof*): "Lokon vi devas havi ekster la tendaro, kien vi elirados por necesaĵoj. Fosileton vi devas havi ĉe vi sur rimeno; kaj kiam vi sidos ekstere, fosu per ĝi kaj reen kovru viajn elirintaĵojn".

Bibliografio

Goiffon R. (1921). *Manuel de Coprologie Clinique. Masson, Paris*, 232 pp.

Langeron M. (1930). *Coprologie microscopique*, 2e ed. *Masson, Paris*, 180 pp.

Laporte D. (1993). *Histoire de la Merde*. 2e ed., *Burgeois, Paris*. 119 pp.

Lewin R.A. (1999). *Merde. Random House, New York*. 187 pp.

Whorton J.C. (2000). *Inner Hygiene. Constipation and the Pursuit of Health in Modern Society. Oxford University Press*. 315 pp.

Wood G.D. (1980). *Coprolite, Urolite and "Vomite". Maledicta* 4, 109-115.

Adreso de la aŭtoro

Prof. Dr. Ralph A. LEWIN
University of California, 3110, Hubbs Hall
La Jolla, CA 92093-0202 / USONO
<rlewin@ucsd.edu>

Priaŭtora informo

La aŭtoro estas emerita profesoro pri mara biologio de *Scripps Institute of Oceanography, University of California, 9500 Gilman Drive, La Jolla, CA*, Usono.

Globoj en *n*-dimensiaj spacoj

– Frandaj eroj por gimnazianoj –

Jón Hafsteinn JÓNSSON

Ni provu difini la volumenon por globo en *n*–dimensia spaco, R^n ($n \in Z_+$). Ni difinu punkton P kiel *n* ordigitaj realaj nombroj, kiuj nomiĝas koordinatoj de $P = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n)$, kaj R^n estas la aro de tiaj punktoj. La nula punkto de R^n estas $O = (0, 0, 0, \ldots, 0)$.

La distancon inter du punktoj $P = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ kaj $A = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ en R^n ni indikas per $|AP|$, kaj ĝi estu

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - a_j)^2}\,.$$

Globo kun centro $A = (a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$ kaj radiuso *r* estas la aro $\{P \mid |AP| \le r\}$.

La aro $\{P \mid |PA| = r\}$ estas la responda **sfero** aŭ surfaco de tiu globo. Globoj kaj sferoj kun centro en O kaj la radiuso *r* do esprimiĝas per

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^{\,2} \le r^2 \text{ kaj } \sum_{j=1}^{n} x_j^{\,2} = r^2\,.$$

Komence ni supozu, ke la dimensio *n* ne superas 3, ĉar tiel ni kapablas vidigi la respondajn figurojn per kutimaj desegnaĵoj.

Ni imagu, ke ni tranĉu la globon $\sum_{j=1}^{n} x_j^{\,2} \le r^2$ per la ebeno $x_n = x$.

La tranĉaĵo estas globo en la $(n-1)$–dimensia spaco kun la ekvacio $\sum_{j=1}^{n-1} x_j^{\,2} \le p^2$, kie $p = \sqrt{r^2 - x^2}$ estas ĝia radiuso, do ĝia $(n-1)$–dimensia volumeno esprimiĝas per $v_{n-1}(p)$.

Fundajn konceptojn en la 3–dimensia spaco ni ĝeneraligos tiel, ke iliaj nomoj signifu analogaĵojn en *n*–dimensiaj spacoj.

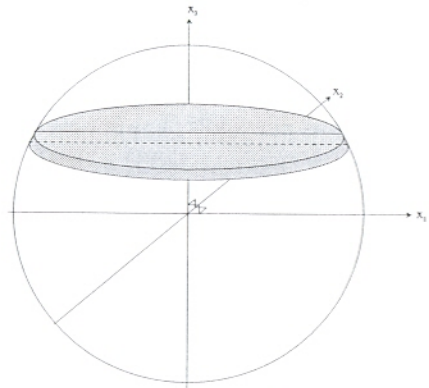
En 1–dimensia spaco, globo signifas strekon. Ĝia radiuso r estas la duono de ĝia longeco, ĝia formulo estas $x_1^2 \le r^2$, kaj ĝia volumeno, $v_1(r) = 2 \cdot r$.

En 2–dimensia spaco, globo signifas cirklon, ĝia formulo estas $x_1^2 + x_2^2 \le r^2$. Ĝia volumeno estas $v_2(r) = \pi \cdot r^2$ [do egalas al ĝia cirkla areo].

En 3–dimensia spaco la formulo por globo estas $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le r^2$.

Kiel konate, ĝia volumeno estas $v_3(r) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$, kaj facilas konstati, ke

$$v_3(r) = \int_{-r}^{r} v_2(p) \cdot dx \quad \text{kaj} \quad v_2(r) = \int_{-r}^{r} v_1(p) \cdot dx .$$



Figuro 1 klarigas, ke $v_3(r) = \int_{-r}^{r} v_2(p) \cdot dx$

Ni hipotezu kiel fundamenton la senliman validecon de

$$(0) \qquad v_n(r) = \int_{-r}^{r} v_{n-1}(p) \cdot dx , \; n \in Z_+ .$$

Ni unue kalkulu $v_4(r)$ kaj $v_5(r)$ laŭ (0), kaj tiucele utiligu la substituon,

$x = r \cdot \sin(t)$, $dx = r \cdot \cos(t) \cdot dt$, [kaj $p = r \cdot \cos(t)$], $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$.

$$v_4(r) = \int_{-r}^{r} v_3(p) \cdot dx = \tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^3 \cdot dx = \tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^4 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4(t) \cdot dt = \tfrac{1}{2} \cdot \pi^2 \cdot r^4$$

$$v_5(r) = \int_{-r}^{r} v_4(p) \cdot dx = \tfrac{1}{2} \cdot \pi^2 \cdot \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^4 \cdot dx = \tfrac{1}{2} \cdot \pi^2 \cdot r^5 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5(t) \cdot dt = \tfrac{8}{15} \cdot \pi^2 \cdot r^5$$

Ni povas daŭrigi tiun procedon, kaj tiel trovi laŭvice $v_6(r)$, $v_7(r)$, $v_8(r)$, $v_9(r)$, ….. $v_{13}(r)$. Mankas tamen kompreniga regulo por ili, kaj tial ni atente observu, kiel malsimile aspektas la rezultoj depende ĉu n divideblas per 2 aŭ ne. Ni atentu, ke la potenco de r ĉiam egalas al n, kio ŝajnas nature, dum la potenco de π kaj la nombra faktoro ŝajnas enigmaj. Tial ni skrupule ekzamenu la formulojn

$v_{12}(r) = \frac{1}{720} \cdot \pi^6 \cdot r^{12}$ kaj $v_{13}(r) = \frac{128}{135135} \cdot \pi^6 \cdot r^{13}$. Pri detaloj en la lastaj pruvoj mi ne havas proponojn, sed pretas respondi al eventualaj demandoj.

Ni konstatas, ke tiuj du nombraj faktoroj esprimeblas kiel $\frac{1}{6!}$ kaj $\frac{2^7}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}$.

Cetere ni konstatas, ke, se la formuloj skribiĝas tiel

$$(1) \qquad v_{2 \cdot n}(r) = \tfrac{1}{n!} \cdot \pi^n \cdot r^{2 \cdot n} \quad \text{kaj} \quad v_{2 \cdot n+1}(r) = \tfrac{2^{2n+1} \cdot n!}{(2 \cdot n+1)!} \cdot \pi^n \cdot r^{2 \cdot n+1} ,$$

ili validas por $n = 1$, [t.e. por la dimensioj 2 kaj 3]. Same pri $n = 2$ [do por la dimensioj 4 kaj 5], kiuj estis supre kalkulitaj. Ni substreku, ke la formuloj (1) ankaŭ tute harmonias kun ĉiuj rezultoj.

Por pli precize argumenti, ke la fundamento [do (0)] sekvigas la formulojn (1), ni pruvu sekvan teoremon

$$(2) \qquad \int_0^{\pi/2} \cos^m(t) \cdot dt = \tfrac{m-1}{m} \cdot \tfrac{m-3}{m-2} \cdot \tfrac{m-5}{m-4} \cdot \cdots \int_0^{\pi/2} \cos^k(t) \cdot dt ,$$

kie k egalas al 0 aŭ 1, depende ĉu m divideblas per 2 aŭ ne.

Tio signifas, ke

$\int_0^{\pi/2} \cos^k(t) \cdot dt$ egalas al $\frac{\pi}{2}$ aŭ 1, depende ĉu m divideblas per 2.

Jen pruvo por (2): Laŭ konata regulo pri parta malderivaĵo, validas

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{m-1}(t) \cdot \cos(t) \cdot dt = \left[\cos^{m-1}(t) \cdot \sin(t)\right]_0^{\pi/2} + (m-1) \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^{m-2}(t) \cdot \sin^2(t) \cdot dt$$

Cetere evidentas: Se $m > 1$, $\left[\cos^{m-1}(t) \cdot \sin(t)\right]_0^{\pi/2} = 0$, kaj tial

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m(t) \cdot dt = (m-1) \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^{m-2}(t) \cdot (1 - \cos^2(t)) \cdot dt$$

kio egalas al

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m(t)\cdot dt = (m-1)\cdot \int_0^{\pi/2} \cos^{m-2}(t)\cdot dt - (m-1)\cdot \int_0^{\pi/2} \cos^m(t)\cdot dt$$

kaj plie

$$m\cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^m(t)\cdot dt = (m-1)\cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{m-2}(t)\cdot dt$$

aŭ

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m(t)\cdot dt = \tfrac{m-1}{m}\cdot \int_0^{\pi/2} \cos^{m-2}(t)\cdot dt\,.$$

Se $m \geq 4$, validas

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{m-2}(t)\cdot dt = \tfrac{m-3}{m-2}\cdot \int_0^{\pi/2} \cos^{m-4}(t)\cdot dt$$

kaj tiel plu, ĝis ni fine havas

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m(t)\cdot dt = \tfrac{m-1}{m}\cdot\tfrac{m-3}{m-2}\cdot\tfrac{m-5}{m-4}\cdot\ldots\cdot \int_0^{\pi/2} \cos^k(t)\cdot dt\,,$$

kie k egalas al 0 aŭ 1, kaj jen (2) estas pruvita.

Nun ni supozu, ke $v_{2\cdot n}(r) = \frac{1}{n!}\cdot\pi^n\cdot r^{2\cdot n}$ kaj kalkulu $\int_r v_{2\cdot n}(p)\cdot dx$.

La supre utiligita substituo, $x = r\cdot\sin(t)$ $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, klarigas la sekvan kalkulon:

$$\int_r v_{2\cdot n}(p)\cdot dx = \tfrac{\pi^n}{n!}\cdot r^{2n+1}\cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)\cdot dt =$$

$$r^{2n+1}\cdot\tfrac{\pi^n}{n!}\cdot\tfrac{2n}{2n+1}\cdot\tfrac{2n-2}{2n-1}\cdot\tfrac{2n-4}{2n-3}\cdot\ldots\cdot\tfrac{2}{3}\cdot 2\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cdot dt =$$

$$\tfrac{\pi^n}{n!}\cdot r^{2n+1}\cdot\tfrac{2n}{2n+1}\cdot\tfrac{2n-2}{2n-1}\cdot\tfrac{2n-4}{2n-3}\cdot\ldots\cdot\tfrac{2}{3}\cdot 2\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cdot dt =$$

$$\tfrac{\pi^n}{n!}\cdot r^{2n+1}\cdot\tfrac{2n}{2n+1}\cdot\tfrac{2n-2}{2n-1}\cdot\tfrac{2n-4}{2n-3}\cdot\ldots\cdot\tfrac{2}{3}\cdot 2 = \pi^n\cdot\tfrac{2^{2n+1}\cdot n!}{(2n+1)!}\cdot r^{2n+1}$$

Se ni supozu $v_{2\cdot n+1}(r) = \frac{2^{2\cdot n+1}\cdot n!}{(2\cdot n+1)!}\cdot\pi^n\cdot r^{2\cdot n+1}$, ni kalkulas $\int_r v_{2\cdot n+1}(p)\cdot dx$ tiel:

$$\int_r v_{2\cdot n+1}(p)\cdot dx = \pi^n\cdot\tfrac{2^{2n+1}\cdot n!}{(2n+1)!}\cdot\int_r p^{2n+1}\cdot dx =$$

$$\pi^n\cdot\tfrac{2^{2n+1}\cdot n!}{(2n+1)!}\cdot r^{2n+2}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2}(t)\cdot dt =$$

$$\pi^n\cdot\tfrac{2^{2n+1}\cdot n!}{(2n+1)!}\cdot r^{2n+2}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2}(t)\cdot dt =$$

$$r^{2n+2}\cdot\pi^n\cdot\tfrac{2^{2n+1}\cdot n!}{(2n+1)!}\cdot\tfrac{2n+1}{2n}\cdot\tfrac{2n-1}{2n-2}\cdot\tfrac{2n-3}{2n-4}\cdot\ldots\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t)\cdot dt =$$

$$r^{2n+2}\cdot\pi^{n+1}\cdot\tfrac{2^{2n+1}\cdot n!}{(2n+1)!}\cdot\tfrac{(2n+1)!}{n!\cdot(n+1)!\cdot 2^{n+1}\cdot 2^n} = r^{2n+2}\cdot\pi^{n+1}\cdot\tfrac{2^{2n+1}\cdot n!}{(2n+1)!}\cdot\tfrac{(2n+1)!}{n!\cdot(n+1)!\cdot 2^{2n+1}} =$$

$$\tfrac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}\cdot r^{2n+2}\,.$$

Tiu rezulto identas al nia supozo pri $v_{2n+2}(r)$.

Pruvite estas:

Se (1) validas por $v_{n-1}(r)$, tiam ankaŭ por $v_n(r)$, egale kia pozitiva entjero n estas. Ĉar (1) validas por la dimensioj 2 kaj 3 ni konkludu, ke (1) validas por ĉiuj dimensioj.

La **sfero** estu la surfaco de la globo, kaj simile al nia kalkulo pri la volumeno de n-dimensia globo ni nun difinu la surfacan mezuron de n–dimensia globo per $y(r) = \frac{dv_n(r)}{dr}$, kio bone harmonias kun la dimensioj 2 kaj 3.

De (1) $v_{2\cdot n}(r) = \frac{1}{n!}\cdot\pi^n\cdot r^{2\cdot n}$ kaj $v_{2\cdot n+1}(r) = \frac{2^{2\cdot n+1}\cdot n!}{(2\cdot n+1)!}\cdot\pi^n\cdot r^{2\cdot n+1}$

tiam sekvas

(1´) $y_{2\cdot n}(r) = \frac{2}{(n-1)!}\cdot\pi^n\cdot r^{2\cdot n-1}$ kaj $y_{2\cdot n+1}(r) = \frac{2^{2\cdot n+1}\cdot n!}{(2\cdot n)!}\cdot\pi^n\cdot r^{2\cdot n}$.

Adreso de la aŭtoro
Jón Hafsteinn JÓNSSON
Bólstaðahlið 45 (701)
105 Rejkjavík/ ISLANDO
<jonhafst@tolvunot.is>

Priaŭtora informo

La aŭtoro estas emerita gimnazia instruisto pri matematiko kaj fiziko.