SCIENCA REVUO de Internacia Scienca Asocio Esperantista BEOGRAD, Jugoslavio	El Vol. 23 n-ro 3 (95) 25.6.1972.

AL KONSTRUADO DE LJAPUNOV-FUNKCIOJ POR NEAŬTONOMAJ SISTEMOJ DE DIFERENCIALAJ EKVACIOJ

(B.M.Bogatyrev, Jar.O.Matvijiŝyn; Ternopil-Kiev, Sovetio)

Multnombraj aplikaj problemoj de la mekaniko, de la teorio de gvidado, reduktiĝas al esplorado de la diferencialaj ekvacioj en la formo:

$$/1/ \qquad \frac{dx}{dt} = Ax + B(t)\,x$$

kie x estas n-mezura vektor-kolono, $B(t)$ estas matriksa funkcio de t kaj A estas matrikso kun konstantaj elementoj.

Aspektantaj kiel /1/ sistemoj estis studataj ĉe diversspecaj limigoj de la matriksoj A kaj $B(t)$. Parte, uzante modernigitan tangent-metodon de I.Newton, estis konsiderata la demando pri la redukteco de sistemo /1/ al la sistemo kun konstantaj koeficientoj [1], [2], [3].

Evidentiĝas ke ĉi tiu metodo estas sufiĉe fruktodona ankaŭ dum la konstruado de Ljapunov-funkcioj por la sistemo /1/. Kiel estas konate valoroj de Ljapunov-funkcioj tute ne elĉerpiĝas per konstatigo de stabileco aŭ nestabileco de solvoj. Scio de Lajpunov-funkcio por konkreta sistemo de aŭtomata regulado permesas doni tempan takson por la pasado de transira procezo, taksi gravitdomajnon, influon de konstante agantaj perturbacioj k.s. [4], [5], [6].

1. Ni pristudos la sistemon de diferencialaj ekvacioj

$$/1.1/ \qquad \frac{dx}{dt} = Ax + B(\varphi)x\,, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

supozante "sufiĉan malgrandecon" de matriksa funkcio $B(\varphi)$; A estas konstanta $n\times n$ matrikso, $\omega = /\omega_1, \ldots, \omega_m/$ estas frekvenca bazo de $B(\varphi)$.

Estu $V_o(x)$ Ljapunov-funkcio por la sistemo

$$/1.2/ \qquad \frac{dx}{dt} = Ax$$

Ni konstruu Ljapunov-funkcion por /1.1/. Estas memkomprenebla deziro prezenti serĉatan funkcion $V(x,t)$ sub la aspekto:

$$/1,3/ \qquad V(x,t) = x' V(\varphi) x\,,$$

kie $V(\varphi)$ estas matriksa funkcio,

$$\varphi = /\varphi_1, \ldots, \varphi_m/, \quad x' = /x_n, \ldots, x_1/, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Laŭ niaj supozoj la kompleta derivato po t de la funkcio $V_o(x)$, prenita kun kondiĉo /1,2/, estas konata por ni kaj prezentas funkcion de la signo malsama kun $V_o(x)$. Markante ĝin per $W_o(x)$, ni havos kompletan derivaton $V(x,t)$ kun kondiĉo /1.1/. Konsiderante /1.3/ oni ricevas

$$\frac{dV(x,t)}{dt} = \frac{dx}{dt}V(\varphi)x + x'\frac{dV(\varphi)}{dt}x + x'V(\varphi)\frac{dx}{dt} =$$

$$/1.4/ \qquad = x'\left[A' + B(\varphi)'\right]V(\varphi)x + x'\frac{dV(\varphi)}{dt}x + x'V(\varphi)\left[A + B(\varphi)\right]x =$$

$$= x'G(\varphi)x\,,$$

kie A', $B(\varphi)'$ estas matriksoj transponigitaj al A, $B(\varphi)$; G estas iu kvadruma formo. Facile rimarki, ke por determino de $V(\varphi)$ el /1.4/ ni venas al jena matriksa ekvacio:

$$/1.5/ \qquad \left[A' + B(\varphi)'\right]V(\varphi) + \frac{dV(\varphi)}{dt} + V(\varphi)\left[A + B(\varphi)\right] = G(\varphi)$$

2. Nun ni okupiĝu pri solvmetodo de la matriksa ekvacio /1.5/. En la ekvacio /1.5/ ni efektivigu linean anstataŭigon

$$/2.1/ \qquad V(\varphi) = \left[I + u(\varphi) \right] V_1(\varphi) ,$$

kie I estas unuo-matrikso, $u(\varphi)$ estas matriksa funkcio, kontentiganta la ekvacion

$$/2.2/ \qquad \frac{du(\varphi)}{dt} = - A'u - uA - \left[B(\varphi) - B_o \right]$$

Substituante /2.1/ en /1.5/ kaj memorante /2.2/ ni ricevas el /1.5/ post iom da transformoj:

$$/2.3/ \qquad \frac{dV_1}{dt} = - A_1' V_1(\varphi) - V_1(\varphi) A_1 + G(\varphi) - V_1(\varphi) B_1(\varphi) - B_2(\varphi) V_1(\varphi) ,$$

kie $A_1' = (A' + B_o')$, $A_1 = (A + B_o)$; $B_1(\varphi)$, $B_2(\varphi)$ estas iuj matriksaj funkcioj, determinitaj pere de $B(\varphi)$, $B(\varphi)'$, $u(\varphi)$, $[I + u(\varphi)]^{-1}$; B_o estas unua membro de elvolvaĵo de $B(\varphi)$ en la Fourier-vico.

Por ricevi unuan proksimiĝon de $V(\varphi)$ el /2.3/ ni havas ekvacion

$$/2.4/ \qquad \frac{dV_1}{dt} = - A_1' V_1(\varphi) - V_1(\varphi) A_1 + G(\varphi)$$

Supozante karakterismajn radikojn de la matrikso A kiel realaj kaj malsamaj kaj normon de la matrikso $B(\varphi)$ kiel sufiĉe malgranda, ni enkondukas la kondiĉojn por solvado de la ekvacio /2.4/, kiuj estas karakteristikaj por la metodo de "plirapidigita konverĝo"

$$/2.5/ \qquad \left[\lambda - \mu + i(k, \omega) \right] \geq \varepsilon \, |k|^{-d}$$

3. Por argumenti eblecon de daŭrigado de iteracia procezo, ni konsideru ekvacion

$$/3.1/ \qquad \frac{du_s(\varphi)}{dt} = - A_s' u_s - u_s A_s - \left[B_s(\varphi) - B_{os} \right] ,$$

kie

$$A'_s = A' + B'_o + B'_{o1} + \dots + B'_{os} \ , \quad A_s = A + B_o + B_{os}$$

Havante taksojn por B_{oi} /$i = 1,2,\dots,s$/ estas facile elekti tian ε , per kiu realiĝos la kondiĉo:

$$/3.2/ \qquad |\lambda_s - \mu_s + i\,(k,\omega)| > \varepsilon\, |k|^{-d} \qquad /s = 1,2,\dots/$$

De kie $u_s(\varphi)$ estas facile prezentebla en la formo de elvolvaĵo $\sum u_k e^{i(k,\varphi)}$, se por $B(\varphi)$ estas plenumataj kondiĉoj [1]. Do, farante sinsekve anstataŭigojn vide /2.1/ kun helpo de lima anstataŭigo

$$/3.3/ \qquad V(\varphi) = \lim_{s \to \infty} \prod_{i=1}^{s} (I + u_i)\, V_i(\varphi)$$

por trovado de serĉita Ljapunov-funkcio, ni venas al ekvacio

$$/3.4/ \qquad \frac{dV}{dt} = -A_o V - V A_o + G(\varphi).$$

Ni rimarku, ke el /3.4/ dum $B(\varphi) \equiv 0$ oni ricevas konatan ekvacion de Ljapunov [7] .

Uzante prezentitan metodon ni ricevas jenan teoremon:

Teoremo

La dekstra parto de la sistemo /1.1/ ke estu kontentigata per jenaj kondiĉoj: Matrikso $B(\varphi)$ estas perioda laŭ $\varphi = /\varphi_1, \dots, \varphi_m/$ kun la periodo 2π, ĝi estas analitika en domajno

$$|\mathrm{Im}\,\varphi| = \sup_{\alpha} |\mathrm{Im}\,\varphi_\alpha| \le \rho_o \qquad /\rho_o > 0/ \ ,$$

por iuj pozitivaj ε kaj d plenumiĝas la kondiĉo /2.5/, kie λ kaj μ estas proprumaj nombroj de la matrikso A kaj

$$\| B(\varphi) \| = \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}(\varphi)| \le M_o \ ,$$

kie M_o estas sufiĉe malgranda nombro; krome por la sistemo /1.2/ ekzistas Ljapunov-funkcio. Tiam ekzistas Ljapunov- funkcio por la sistemo /1.1/ kaj por ĝia determino estas konstruata ekvacio /3.4/.

Rimarkinde, ke la proponita metodo estas facile transportebla por linearaj neaŭtonomaj ekvacioj en funkcionalaj spacoj kaj kun iom da ŝanĝo povas esti aplikata al malfirme nelinearaj ekvacioj. En la kazo , kiam la matrikso A posedas kvazidiagonalan formon, la konstruado de Ljapunov-funkcio sufiĉe plifaciliĝas. Kaj por la reduktado de matrikso al kvazidiagonala aspekto ekzistas standardaj programoj, kio permesas plifaciligi kalkullaborojn.

Résumo

AL KONSTRUADO DE LJAPUNOV-FUNKCIOJ
PRI NEAŬTONOMAJ SISTEMOJ DE DIFERENCIALAJ EKVACIOJ

B.M.Bogatyrev, Jar.O.Matvijiŝyn

Oni pritraktas novan metodon por konstrui Ljapunov-funkciojn por neaŭtonomaj sistemoj de diferencialaj ekvacioj.

La metodo de la konstruo de tiaj funkcioj estas sen gravaj malfacilaĵoj transportebla al ekvacioj en funkcionalaj spacoj.

Citita literaturo:

[1] Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский, А.М.Самойленко. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике, Москва, 1969.

[2] Jur.O.Mytropolskyj, B.M.Bogatyrev, Jar.O.Matvijišyn.- "Scienca Revuo", Beograd, Vol.20, № 1(77), 1969.

[3] B.M.Bogatyrev, Jar.O.Matvijišyn.- "Scienca evuo", V.21, №6, 1970, Beograd.

[4] Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи автоматического регулирования, Москва, 1951.

[5] Малкин И.Г., Теория устойчивости движения, Москва, 1952

[6] Hahn W., Theorie und Anwendung der Direkten Methode von Ljapunov, Springer- Verlag, Berlin, 1959.

[7] Ляпунов А.М., Общая задача об устойчивости движения, Москва, 1959.

Резюме

К ПОСТРОЕНИЮ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СЛАБО-АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ.

Б.М.Богатырев, Я.А.Матвиишин

В работе рассматривается новый метод построения функций Ляпунова для слабо-автономных систем дифференциальных уравнений.

Методика построения функций Ляпунова без особых трудностей может быть перенесена на уравнения в функциональных пространствах.