(6) *Bühl B. et al.* (2003, 2004). Faszinierende Forschung. Österreich. Verlag Wien 2003; Hu.: Az emberiség megoldatlan rejtélyei. Reader's Digest Bp. 2004, p.28, p.167-193.

(7) *Glasenapp H.* (1972, 1975). Die fünf Weltreligionen. Dietrische Verlag Düssel dorf-Köln 1972; Hu.: Az Öt Világvallás Gondolat Bp. 1975, p. 17, 81, 125, 168, 195-201, 207, 256, 347.

(8) *Gulyás I. et al.* (2005). Fizika. Modern Fizika. Müszaki Kiadó Bp., p.218-229.

(9) *Hawking S.* (2002). The Universe in a Nutshell. Hu.: A Világegyetem dióhéjban Akkord Kiadó Bp., p.56-70, 111-103.

(10) *Hegyi I.* (2004). Perioda sistemo de oscilad-frekvencoj. Scienca Revuo, p.55-62.

(11) *Holics L.* (1994). Kvantummechanika. Müszaki Kiadó Bp., p.999-1030.

(12) *Hollán Zs. et al.* (1973). Orvosi Lexikon. Akadémia Kiadó Bp., Q-Z 767

(13) *Hutching R.* (2002, 2005). 1000 Years of Famous People. Kingfisher Publication, 2002; Hu.: Évezredek hires emberei. Trivium Bp. 2005, p.58-70.

(14) *Jakucs L. & Nagy Gné* (1976). A Föld, melyen ékünk. Oktatási Studió Szeged, p.6-34.

(15) *Klix F.* (1985). Erwachsenes Denken. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1983, Hu.: Az ébredö gondolkodás. Gondolat Kiadó Bp., p.24-26.

(16) *Lorenz K.* (1978, 1985). Vergleichende Verhaltensforschung. Grundlagen der Ethologie. Springer Verlag Wien 1978. Hu.: Összehasonlitó magatartáskutatás. Az etológia alapjai. Gondolat Kiadó Bp. AA 1985, p.29-36.

(17) *Mihály Gy.* (2004). Mindentudás Egyeteme, Kossuth Kiadó Bp., p.241-250.

(18) *Öveges J.* (1959). A kultura világa. Tecnika. Minerva Kiadó Bp., p.734-749.

(19) *Simonyi K.* (1981). A fizika kulurtörténete. Gondolat Kiadó Bp., p.58-453

(20) *Sparrow G.* (2001). The Universe and how to see it. Hu.: Az Univerzum közel röl. Gabo Kiadó Bp. 2001, p.32-39, 82-177.

(21) *Sziget Gynée* (1971, 1976). Filosofskaja enciklopedija. Moskva 1971. Hu.: Filozófiai kislexicon. Kossuth Kiadó Bp. 1976 p.78, 112-113, 199, 224, 251-252.

(22) *Whirter A. et al.* (1995, 2001). Illustrated Dictionary of Essential Knowledge. Reader's Digest London 1995. Hu.: Az általáno müveltség képes szótára. Reader's Digest Bp. 2001, p.529-533.

(23) *Wilson M.* (1978). Az energia. Müszaki Kiadó Bp., p.10-11, 34.

Adreso de la aŭtoro

D-ro István HEGYI
Batthyány u. 19 D II, 9
HU – 8200 Veszprém / HUNGARIO
<montano@invitel.hu>

Priaŭtora informo

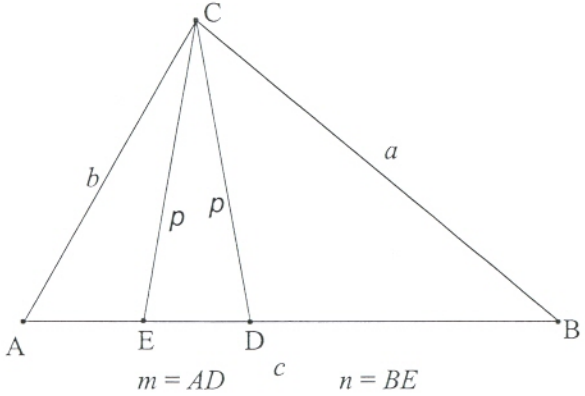
La aŭtoro estas ĉef-infankuracisto kaj Asociita Docento (ADoc) de Akademio Internacia de la Sciencoj (AIS) San Marino.

Frandaj eroj por gimnazianoj

Jón Hafsteinn JÓNSSON

1. Pruvo de la Pitagora kaj ĝia inversa teoremoj

Sur la latero c (=AB) de ΔABC ni elektu du punktojn D kaj E tiel, ke:



$$\angle ACD = \angle B \quad \text{kaj}$$
$$\angle BCE = \angle A, \quad \text{do}$$
$$\angle ADC = \angle BEC = \angle C \ \text{kaj}$$
$$\Delta ABC \approx \Delta ACD \approx \Delta CBE$$

De tio sekvas:
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{AD},$$
$$\frac{AB}{CB} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{CE},$$
$$\frac{AC}{CB} = \frac{CD}{BE} = \frac{AD}{CE}.$$

Krom la kutimajn simbolojn pri la unuopaj eroj en ΔABC, ni uzu m, n kaj p por AD, BE kaj CE.

Atentu, ke en ΔEDC validas $\angle E = \angle D$.

Do CD = CE = p. La suprajn ekvaciojn ni nun skribu per pli mallongaj simboloj por plifaciligi la celatan kalkulon:

$$\frac{c}{b}=\frac{a}{p}=\frac{b}{m}, \qquad \frac{c}{a}=\frac{a}{n}=\frac{b}{p}, \qquad \frac{b}{a}=\frac{p}{n}=\frac{m}{p}$$

El tiuj ekvacioj haveblas, $b^2 = m\cdot c$, $a^2 = n\cdot c$ kaj $p^2 = m\cdot n$, kio donas

(1) $$a^2+b^2=(n+m)\cdot c\,.$$

De la supra figuro evidentas: $\angle C = 90^\circ \Leftrightarrow m+n=c$.

Tial validas

(2) $$\angle C = 90^\circ \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2\,.$$

Cetere evidentas $m\cdot a^2+n\cdot b^2 = 2\cdot p^2\cdot c$,
el kio ni konkludas

(3) $$p^2=\frac{m\cdot a^2+n\cdot b^2}{2\cdot c}\,.$$

2. La teoremo de Herono

Se s estas duono de la perimetro de ΔABC, nome $s=\dfrac{a+b+c}{2}$,

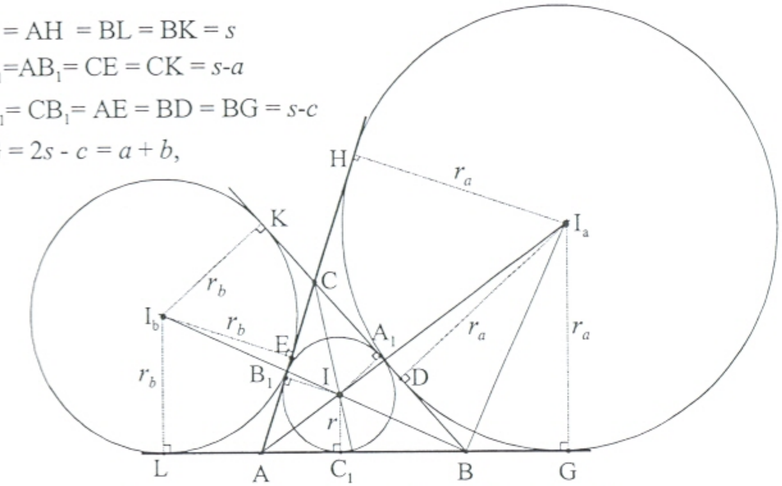
tiam ĝia areo estas

$$T=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}\,.$$

Kvankam Herono vivis en la unua jarcento post Kristo, tiu teoremo certe estas pli malnova kaj jam konata de Arĥimedo (287-212 a.K.).

La sekva figuro apartenas al la gimnazia matematiko. El ĝi legeblas jenaj formuloj pri la surfiguraj distancoj kaj la arealo de ΔABC [T],

AG = AH = BL = BK = s
$AC_1 = AB_1 = CE = CK = s-a$
$CA_1 = CB_1 = AE = BD = BG = s-c$
LG = $2s - c = a + b$,



$T = r\cdot s = r_a\cdot(s-a) = r_b\cdot(s-b) = r_c\cdot(s-c)$.

Cetere tiu figuro liveras la sekvan pruvon de la teoremo de Herono. El $T = r\cdot s = r_a\cdot(s-a)$ ni konkludas $T^2 = r\cdot s\cdot r_a\cdot(s-a)$ kaj el $\Delta I_aBG \approx \Delta BIC_1$ sekvas $\frac{BG}{IC_1}=\frac{I_aG}{BC_1}$, kion ni skribu tiel $\frac{s-c}{r}=\frac{r_a}{s-b}$.

Tial validas: $r\cdot r_a = (s-b)\cdot(s-c)$ kaj sekve

$$T^2 = s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\,.$$

Jen la teoremo de Heron estas pruvita.

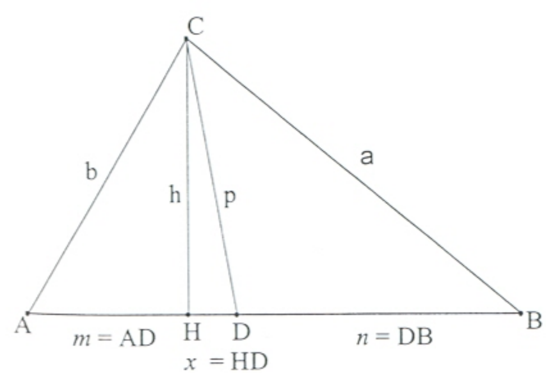
3. La teoremo de *Stewart*

Ni elektu arbitran punkton D sur la latero c en ΔABC, kaj metu m = AD, n = BD kaj p = CD.

Tiam validas

$$p^2=\frac{m\cdot a^2+n\cdot b^2}{c}-n\cdot m$$

Pruvo:
En ΔABC, la alto de C estu h = CH kaj x = HD. (vd. la apudan figuron).
Do AH = $m - x$ kaj BH = $n + x$



Laŭ la teoremo de Pitagoro (570-480 a.K.) validas la sekvaj ekvacioj:

(4) $h^2 + x^2 = p^2$

(5) $a^2 = h^2 + (n + x)^2$

(6) $b^2 = h^2 + (m - x)^2$

El (5) kaj (6) ni konkludas, per helpo de (4):

(5A) $a^2 = p^2 - x^2 + n^2 + x^2 + 2{\cdot}n{\cdot}x = p^2 + n^2 + 2{\cdot}n{\cdot}x$

kaj

(6A) $b^2 = p^2 - x^2 + m^2 + x^2 - 2{\cdot}m{\cdot}x = p^2 + m^2 - 2{\cdot}m{\cdot}x$

el kio sekvas:

(5B) $m{\cdot}a^2 = m{\cdot}p^2 + m{\cdot}n^2 + 2{\cdot}\, m{\cdot}n{\cdot}x$

kaj

(6B) $n{\cdot}b^2 = n{\cdot}p^2 + n{\cdot}m^2 - 2{\cdot}m{\cdot}n{\cdot}x$

Adicio de (5B) kaj (6B) donas:

(7) $m{\cdot}a^2 + n{\cdot}b^2 = (m + n){\cdot}p^2 + (m + n)\,{\cdot}m{\cdot}n,$

kio [ĉar $m + n = c$] garantias la rezultan ekvacion:

(8) $$p^2 = \frac{m \cdot a^2 + n \cdot b^2}{c} - m \cdot n$$

La teoremo de *M. Stewart* estis esprimita je la unua fojo en 1746. Ĝia unua pruvo tamen devenas de *R. Simson* en 1751. Tiu belega teoremo ebligas al ni krei formulojn por diversaj strekoj inter C kaj c [ekz. m_c kaj v_C]. Arĥimedo verŝajne konis (8) aŭ iun egalvaloran teoremon.

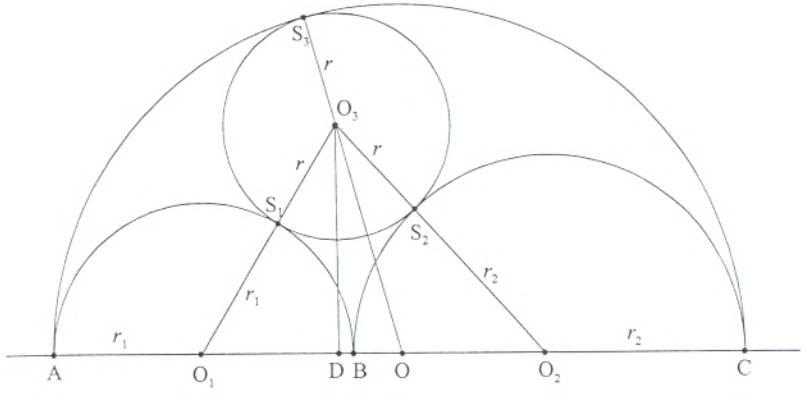
Nun ni utiligu (8) por pruvi du famajn asertojn de Arĥimedo.

4. Du asertoj de Arĥimedo

Aserto 1

Sur linio l situas tri punktoj A, B kaj C, kie B estas inter A kaj C. Ni desegnu tri duoncirklojn kun la diametroj AB, BC kaj AC ĉiujn samflanke de l. Iliaj centroj estu O_1, O_2 kaj O, iliaj radiusoj estas r_1, r_2 kaj tial $r_1 + r_2$. Nia tasko koncernas la cirklon kiu tuŝas la tri duoncirklojn: unu interne kaj la du aliajn de ekstere.

La **aserto** estas, ke la distanco de l al la centro [O_3] de tiu ĵus menciita cirklo egalas al ĝia diametro.



Evidentas ke AB = $2{\cdot}r_1$, BC = $2{\cdot}r_2$, AC = $2{\cdot}(r_1 + r_2)$ kaj $O_1O_2 = r_1 + r_2$. Estu r la radiuso de tiu priparolata cirklo kaj $h = DO_3$ la distanco de l al O_3. La lateroj de $\Delta O_1O_2O_3$ estas: $r_1 + r_2$, $r_2 + r$ kaj $r_1 + r$, ĝia duonperimetro do estas $s = r_1 + r_2 + r$. La areo de $\Delta O_1O_2O_3$ estas $T = \frac{1}{2}\cdot h \cdot (r_1 + r_2)$. Laŭ la teoremo de Herono ĝi egalas al $\sqrt{(r_1 + r_2 + r)\cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r}$. Sekve validas:

$$h = \frac{2\sqrt{(r_1 + r_2 + r)\cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r}}{r_1 + r_2}$$

Ni atentu, ke $O_1O = r_2$ kaj $O_2O = r_1$. Per p ni indiku O_3O.

Laŭ teoremo de *Stewart* validas: $p^2 = \dfrac{r_1(r_1 + r)^2 + r_2(r_2 + r)^2}{r_1 + r_2} - r_1 \cdot r_2$,

kio donas:

$$p^2 - r^2 = 2r\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1 + r_2} + (r_2 - r_1)^2$$

kaj fariĝas al

$$(p + r)(p - r) = 2 \cdot r \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1 + r_2} + (r_2 - r_1)^2 .$$

El $p+r=r_1+r_2$ sekvas $p-r=r_1+r_2-2\cdot r$. Tio kondukas al

$$r_1+r_2-2\cdot r=2\cdot r\cdot\frac{r_2^2+r_1^2}{(r_2+r_1)^2}+\frac{(r_2-r_1)^2}{r_2+r_1}$$

kio sekvigas:

$$2\cdot r\left(1+\frac{r_2^2+r_1^2}{(r_2+r_1)^2}\right)=(r_2+r_1)-\frac{(r_2-r_1)^2}{r_2+r_1}$$

kaj:

$$4\cdot r\left(\frac{r_2^2+r_2r_1+r_1^2}{(r_2+r_1)^2}\right)=\frac{4r_2r_1}{r_2+r_1}$$

La rezulto de tio estos:

$$r=\frac{r_1r_2(r_2+r_1)}{r_2^2+r_2r_1+r_1^2}$$

Kaj kroma rezulto:

$$r_2+r_1+r=r_2+r_1+\frac{r_1r_2(r_2+r_1)}{r_2^2+r_2r_1+r_1^2}=(r_2+r_1)\left(1+\frac{r_1r_2}{r_2^2+r_2r_1+r_1^2}\right)=\frac{(r_1+r_2)^3}{r_2^2+r_2r_1+r_1^2}$$

Se ni metas tiujn du rezultojn en la formulon

$$h=\frac{2\sqrt{(r_1+r_2+r)\cdot r_1\cdot r_2\cdot r}}{r_1+r_2}$$

ni ricevas

$$h=\frac{2\sqrt{\frac{(r_1+r_2)^3}{r_2^2+r_2r_1+r_1^2}\cdot r_1\cdot r_2\cdot\frac{r_1r_2(r_2+r_1)}{r_2^2+r_2r_1+r_1^2}}}{r_1+r_2}=2\cdot\frac{r_2r_1(r_2+r_1)}{r_2^2+r_2r_1+r_1^2}$$

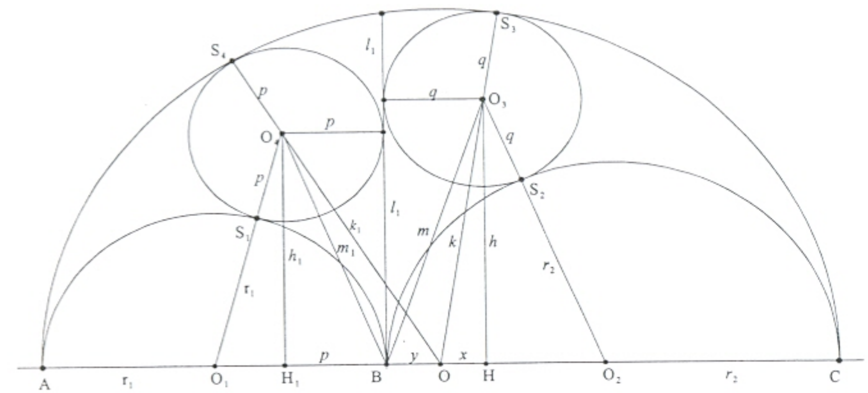
Tiel la iom surpriziga aserto, ke $h=2\cdot r$, estas pruvita.

Aserto 2

Sur linio l situas tri punktoj A, B kaj C, kie B estas inter A kaj C. Ni desegnu tri duoncirklojn kun la diametroj AB, BC kaj AC, ĉiujn

samflanke de l. Iliaj centroj estu O_1, O_2 kaj O, iliaj radiusoj r_1, r_2 kaj tial r_1+r_2. Ni desegnu linion l_1 tra B perpendiklan al l kaj du cirklojn kiuj havu la centrojn O_3, kaj O_4, la radiusojn q kaj p, disflanke tuŝu l_1 kaj tuŝu po du el la tri menciitaj duoncirkloj [unu interne kaj la alian de ekstere].

La **aserto** estas, ke egalas la radiusoj de tiuj du cirkloj [nome ke $q=p$].



Supozu, ke $r_1<r_2$, kaj ni pruvos, ke $p=q$. [Se $r_1=r_2$, evidentas ke $p=q$]

Komence ni menciu jenajn gravajn, evidentajn faktojn: $AB=2\cdot r_1$, $BC=2\cdot r_2$, $AC=2\cdot(r_1+r_2)$, $O_1O_2=r_1+r_2$, $OO_2=r_1$, kaj $OO_1=r_2$.

Per m kaj m_1 indiku la distancojn, BO_3. kaj BO_4. La perpendikloj de O_3 kaj O_4 al l estu O_3H kaj O_4H_1 kun la longoj h kaj h_1. Cetere ni menciu la longojn de jenaj strekoj en la supra figuro. Evidentas ke $HO_2=r_2-q$ kaj $O_2O_3=r_2+q$, el kio sekvas

$$h^2=(r_2+q)^2-(r_2-q)^2=4\cdot q\cdot r_2\,.$$

Cetere validas $m^2=q^2+4\cdot q\cdot r_2$.

Per y kaj k ni indiku la distancojn BO kaj OO_3. Ni rimarku, ke $y=r_2-r_1$, kaj $k=r_1+r_2.-q$.

La teoremo de *Stewart* aplikata al ΔBO_2O_3 donas:

$$k^2 = \frac{r_1 \cdot m^2 + y \cdot (r_2 + q)^2}{r_2} - r_1 \cdot y$$

kion ni skribas

$$r_2 \cdot (r_1 + r_2 - q)^2 - r_1 \cdot q \cdot (q + 4 \cdot r_2) = (r_2 - r_1) \cdot \left((r_2 + q)^2 - r_1 \cdot r_2 \right)$$

Tiun ekvacion ni ordigos laŭ la formo $A \cdot q^2 + B \cdot q = C$ kaj ricevos

$$0 \cdot q^2 - 4 \cdot (r_1 + r_2) \cdot q = -4 \cdot r_1 \cdot r_2$$

El tio rezultas $q = \dfrac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$.

El la simetrio en tiu rezulta formulo (inter r_1 kaj r_2) ni ne konkludu, ke sama esprimo validas por p, ĉar la supozo, ke $r_1 < r_2$, ludis ioman rolon en utiligo de la funda figuro. Ni tial analoge serĉu formulon por p kaj tiucele direktu nian rigardon al ΔO_1OO_4.

Ni atentas, ke $h_1^2 = 4 \cdot p \cdot r_1$, $m_1^2 = p^2 + 4p \cdot r_1$ kaj $k_1 = r_1 + r_2 - p$.

El la teoremo de *Stewart* ni konkludas, ke:

$$m_1^2 = \frac{r_1 k_1^2 + y(r_1 + p)^2}{r_2} - r_1 y$$

kio simile al ĉi-supre donas

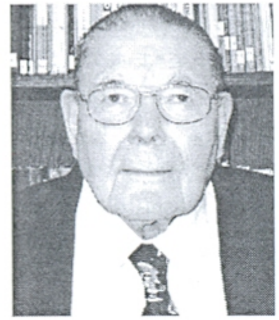
$$p^2 \cdot \left(r_2 - r_1 - (r_2 - r_1)\right) + p \cdot \left(4 \cdot r_2 \cdot r_1 + 2 \cdot r_1 \cdot (r_2 + r_1) - 2 \cdot r_1 \cdot (r_2 - r_1)\right) = r_1 \cdot \left((r_2 + r_1)^2 - (r_2 - r_1)^2 \right)$$

kaj: $\quad 0 \cdot p^2 + 4 \cdot (r_1 + r_2) \cdot p = 4 \cdot r_1 \cdot r_2 \qquad p = \dfrac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$

Tiel finiĝas la pruvo.

Adreso de la aŭtoro: *Jón Hafsteinn JÓNSSON*
Bólstaðahlíð 45 (701)
105 Rejkjavík / ISLANDO
<jonhafst@tolvunot.is>

Priaŭtora informo: La aŭtoro estas emerita gimnazia instruisto pri matematiko kaj fiziko.



La Platonaj korpoj
(kaj kial povas esti nur kvin)

Stevens T. NORVELL jr.

Kio estas "Platona korpo", kaj kial tiuj tridimensiaj solidoj povas ekzisti en nur kvin formoj? En Fig.1 oni vidas ĉiujn kvin. Ili estas la kvaredro aŭ trilatera piramido (A), la sesedro aŭ kubo (B), la okedro (C), la dekduedro (Ĉ) kaj la dudekedro (D).

Ĉiu Platona korpo estas tute simetria laŭ pluraj kriterioj: ĉiu faco (= edro) estas regula plurlatero, kaj ĉiu vertico estas simetria. En la sama korpo ĉiu faco kongruas kun ĉiu alia faco, kaj ĉiu vertico kongruas kun ĉiu alia vertico. En la sama korpo ankaŭ ĉiu eĝo estas samlonga, kaj estas identaj anguloj inter la du plurlateroj kiuj kuniĝas ĉe eĝo. Kiel la epiteto implicas, la Platonaj korpoj estis konataj al la antikvaj grekoj (helenoj), kvankam Platono mem ne multe kontribuis al la kompreno de tiuj figuroj. La pitagoranoj unue studis ilin. La antikvaj matematikistoj mistike imagis, ke perfektaj geometriaj figuroj montras la formon de atomoj de la kvar elementoj: la **kvaredro**[1] **de fajro**, la **kubo de tero** (laŭ ili, la plej stabila), la **okedro de aero** kaj la **dudekedro de akvo**. La **dekduedro**, kiun ili eltrovis laste, estis laŭ ilia supozo la formo **de la kosmo**.

Eĉ la renoma matematikisto *Johannes Kepler* (1571-1630), kiu malkovris la leĝojn de la planedaj orbitoj, opiniis, ke devas esti rilato inter ĉiu planedo kaj unu el la Platonaj korpoj. En Esperanto la nomo de la figuro indikas la nombron de la simetriaj edroj de ĉiu Platona korpo. La formo de la faco povas esti trilatera, kvadrata aŭ kvinlatera. Ĉe kvaredro, okedro kaj dudekedro la facoj estas regulaj trilateroj (= trianguloj). Tamen, ĉi tiuj korpoj malsamas unu de la aliaj, ne nur pro la nombro de facoj, sed ankaŭ pro la nombro de trilateroj ĉe ĉiu ver-

[1] Modernaj ĥemiistoj informas nin, ke atomo de karbono havas formon de kvaredro.