$$k^2 = \frac{r_1 \cdot m^2 + y \cdot (r_2 + q)^2}{r_2} - r_1 \cdot y$$

kion ni skribas

$$r_2 \cdot (r_1 + r_2 - q)^2 - r_1 \cdot q \cdot (q + 4 \cdot r_2) = (r_2 - r_1) \cdot \left((r_2 + q)^2 - r_1 \cdot r_2\right)$$

Tiun ekvacion ni ordigos laŭ la formo $A \cdot q^2 + B \cdot q = C$ kaj ricevos

$$0 \cdot q^2 - 4 \cdot (r_1 + r_2) \cdot q = -4 \cdot r_1 \cdot r_2$$

El tio rezultas $q = \dfrac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$.

El la simetrio en tiu rezulta formulo (inter $r_1$ kaj $r_2$) ni ne konkludu, ke sama esprimo validas por $p$, ĉar la supozo, ke $r_1 < r_2$, ludis ioman rolon en utiligo de la funda figuro. Ni tial analoge serĉu formulon por $p$ kaj tiucele direktu nian rigardon al $\Delta O_1OO_4$.

Ni atentas, ke $h_1^2 = 4 \cdot p \cdot r_1$, $m_1^2 = p^2 + 4p \cdot r_1$ kaj $k_1 = r_1 + r_2 - p$.

El la teoremo de *Stewart* ni konkludas, ke:

$$m_1^2 = \frac{r_1 k_1^2 + y(r_1 + p)^2}{r_2} - r_1 y$$

kio simile al ĉi-supre donas

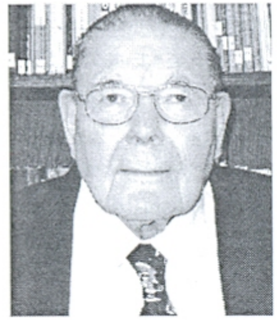
$$p^2 \cdot \left(r_2 - r_1 - (r_2 - r_1)\right) + p \cdot \left(4 \cdot r_2 \cdot r_1 + 2 \cdot r_1 \cdot (r_2 + r_1) - 2 \cdot r_1 \cdot (r_2 - r_1)\right) = r_1 \cdot \left((r_2 + r_1)^2 - (r_2 - r_1)^2\right)$$

kaj: $0 \cdot p^2 + 4 \cdot (r_1 + r_2) \cdot p = 4 \cdot r_1 \cdot r_2$ $\qquad p = \dfrac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$

Tiel finiĝas la pruvo.

**Adreso de la aŭtoro:** *Jón Hafsteinn JÓNSSON*
*Bólstaðahlíð 45 (701)*
*105 Rejkjavík* / ISLANDO
<jonhafst@tolvunot.is>

**Priaŭtora informo:** La aŭtoro estas emerita gimnazia instruisto pri matematiko kaj fiziko.



# La Platonaj korpoj
## (kaj kial povas esti nur kvin)

*Stevens T. NORVELL jr.*

Kio estas "Platona korpo", kaj kial tiuj tridimensiaj solidoj povas ekzisti en nur kvin formoj? En Fig.1 oni vidas ĉiujn kvin. Ili estas la kvaredro aŭ trilatera piramido (A), la sesedro aŭ kubo (B), la okedro (C), la dekduedro (Ĉ) kaj la dudekedro (D).

Ĉiu Platona korpo estas tute simetria laŭ pluraj kriterioj: ĉiu faco (= edro) estas regula plurlatero, kaj ĉiu vertico estas simetria. En la sama korpo ĉiu faco kongruas kun ĉiu alia faco, kaj ĉiu vertico kongruas kun ĉiu alia vertico. En la sama korpo ankaŭ ĉiu eĝo estas samlonga, kaj estas identaj anguloj inter la du plurlateroj kiuj kuniĝas ĉe eĝo. Kiel la epiteto implicas, la Platonaj korpoj estis konataj al la antikvaj grekoj (helenoj), kvankam Platono mem ne multe kontribuis al la kompreno de tiuj figuroj. La pitagoranoj unue studis ilin. La antikvaj matematikistoj mistike imagis, ke perfektaj geometriaj figuroj montras la formon de atomoj de la kvar elementoj: la **kvaredro**[1] **de fajro**, la **kubo de tero** (laŭ ili, la plej stabila), la **okedro de aero** kaj la **dudekedro de akvo**. La **dekduedro**, kiun ili eltrovis laste, estis laŭ ilia supozo la formo **de la kosmo**.

Eĉ la renoma matematikisto *Johannes Kepler* (1571-1630), kiu malkovris la leĝojn de la planedaj orbitoj, opiniis, ke devas esti rilato inter ĉiu planedo kaj unu el la Platonaj korpoj. En Esperanto la nomo de la figuro indikas la nombron de la simetriaj edroj de ĉiu Platona korpo. La formo de la faco povas esti trilatera, kvadrata aŭ kvinlatera. Ĉe kvaredro, okedro kaj dudekedro la facoj estas regulaj trilateroj (= trianguloj). Tamen, ĉi tiuj korpoj malsamas unu de la aliaj, ne nur pro la nombro de facoj, sed ankaŭ pro la nombro de trilateroj ĉe ĉiu ver-

[1] Modernaj ĥemiistoj informas nin, ke atomo de karbono havas formon de kvaredro.

tico (vd. Tabelon 1). Ĉe la sesedro (= kubo) la facoj estas regulaj kvarlateroj (= kvadratoj). Ĉe la dekduedro la facoj estas regulaj kvinlateroj (= pentagonoj).

La helena matematikisto Eŭklido (ĉ. 300 a.K.) sciis, ke povas esti ne pli ol kvin Platonaj korpoj. Kial? Unue pripensu, ke ĉe ĉiu vertico devas kuniĝi almenaŭ tri simetriaj plurlateroj. Se estus nur du plurlateroj ĉe vertico, la figuro ne povus esti tridimensia. En Figuro 2 A (vd. Fig. 2) oni vidas, ke, se oni havus tri simetriajn trilaterojn kiuj kunmetiĝas ĉe punkto, kaj se oni faldus ilin laŭ la eĝoj tiel, ke rekto 'a' kuniĝas kun rekto 'b', kreiĝintus unu vertico de simetria kvaredro.

Simile, pripensu Fig. 2 B: se ekzistus kvar trilateroj ĉe punkto kaj oni faldus tiel, ke rekto 'a' kuniĝus kun rekto 'b', ekestus vertico de okedro. En Fig. 2 C ni vidas, ke, se estus kvin trilateroj ĉe punkto, faldado kaj kunmeto de 'a' al 'b' kreus verticon de dudekedro. Tamen, se ses simetriaj trilateroj kuniĝus ĉe punkto, ne estus spaco por faldi laŭ la eĝoj por krei verticon (Fig. 2 Ĉ); ses regulaj trilateroj ĉe vertico ne eblas. La nombro de trilateroj ĉe vertico devas esti tri, kvar aŭ kvin: jen la kvaredro, la okedro kaj la dudekedro.

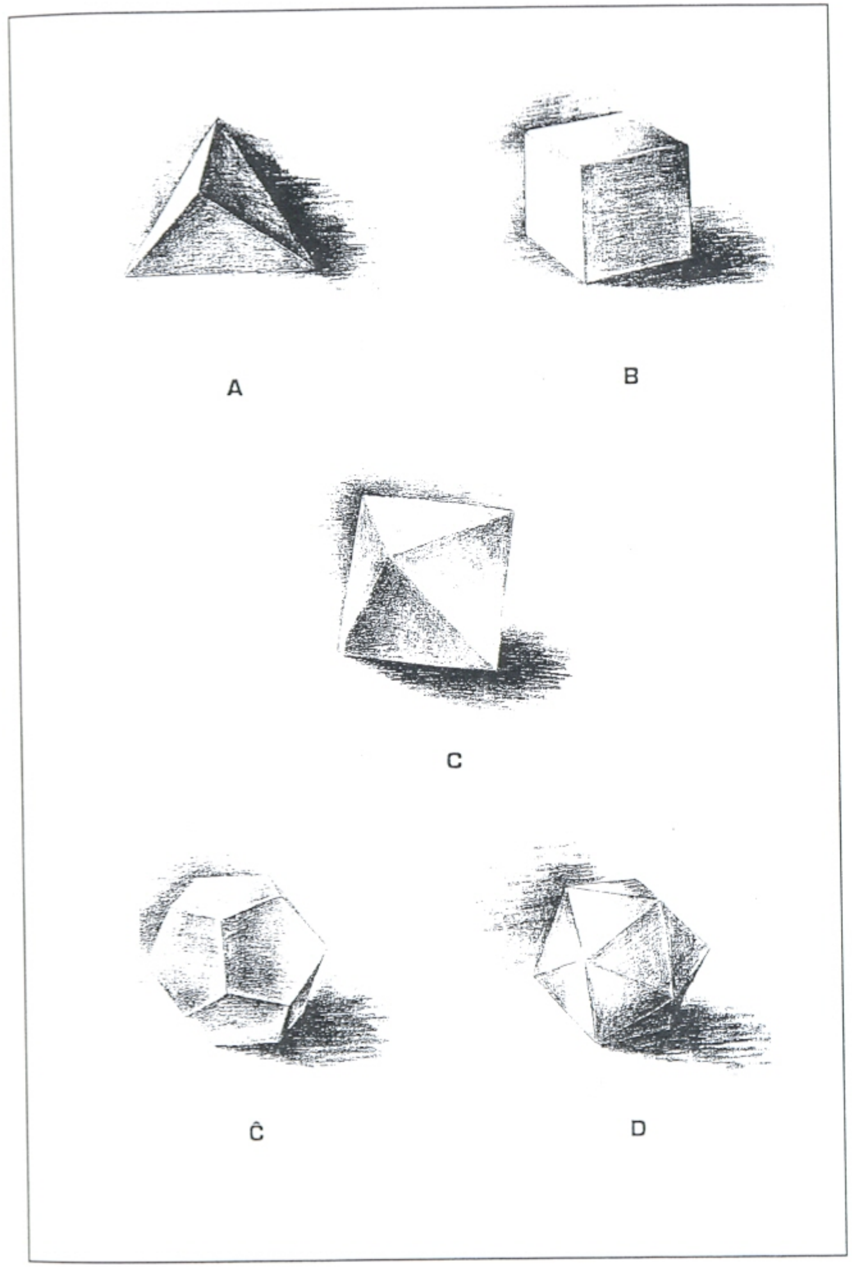
| Geometria figuro | Formo de facoj (edroj) | Nombro da facoj | Nombro da verticoj | Nombro da facoj ĉe ĉiu vertico | Nombro da eĝoj |
|---|---|---|---|---|---|
| kvaredro | trilatera | 4 | 4 | 3 | 6 |
| sesedro (kubo) | kvarlatera | 6 | 8 | 3 | 12 |
| okedro | trilatera | 8 | 6 | 4 | 12 |
| dekduedro | kvinlatera | 12 | 20 | 3 | 30 |
| dudekedro | trilatera | 20 | 12 | 5 | 30 |

**Tabelo 1**

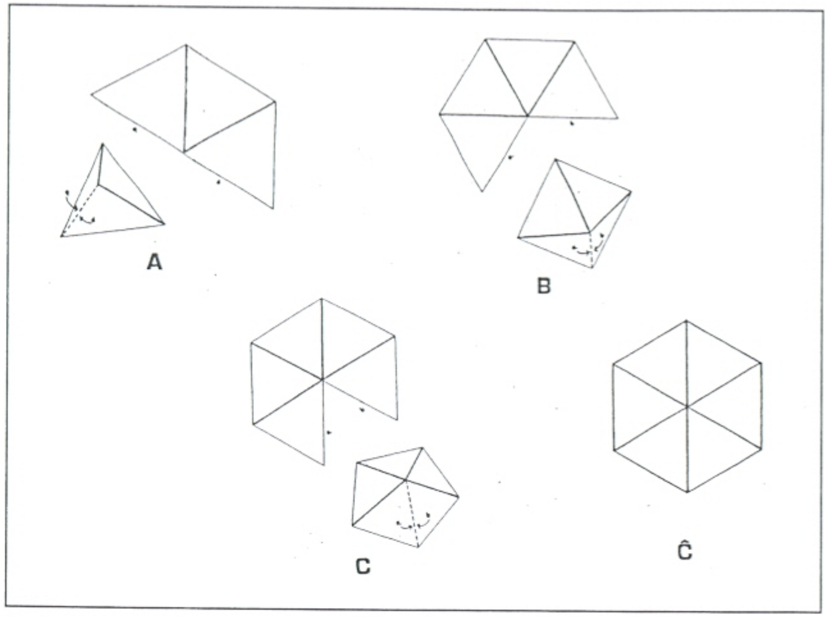
Rigardu Figuron 3. Se estas tri kvadratoj ĉirkaŭ punkto (Fig. 3 A), oni povas faldi tiel, ke rekto 'a' kuniĝas kun rekto 'b' – jen vertico de sesedro (kubo). Tamen, se kvar kvarlateroj kuniĝus ĉe punkto (Fig. 3 B), mankus spaco por faldi. Do, vertico el kvadratoj devas enhavi precize tri – nek du nek kvar eblas.

Pripensu nun kvinlaterojn. Pli ol tri eĉ ne povas kuniĝi ĉe punkto. Tamen, en Fig. 3 C oni vidas, ke estas faldspaco, kiam oni kune kun-

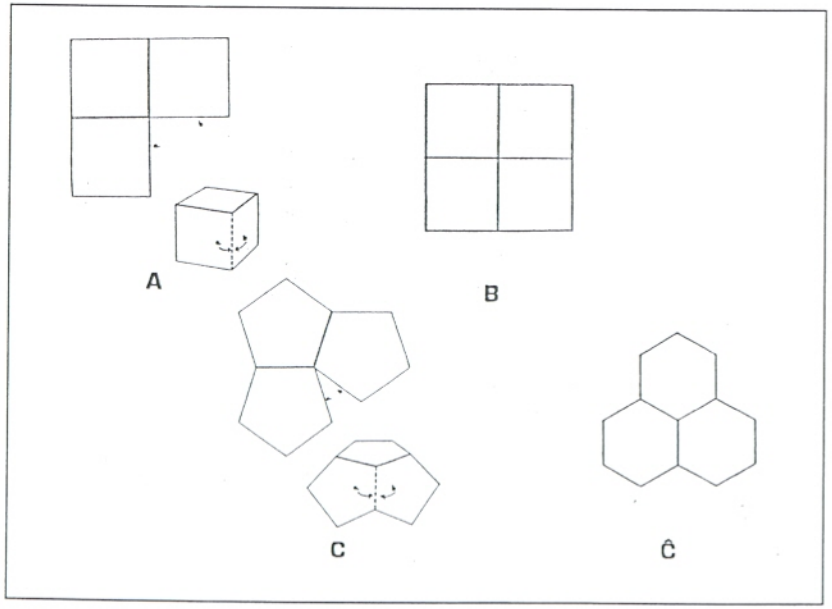





**Figuro 1**




Figuro 2




Figuro 3



metas tri kvinlaterojn. Jen vertico de dekduedro. Tamen, se tri seslateroj kuniĝus ĉe punkto (Fig. 3 Ĉ), ne estus faldspaco. Do, ni ĵus montris, ke regula seslatero ne povas esti faco de simetria pluredro.

Jen ĉio. Ne estas aliaj ebloj. Ni devas konsenti kun Eŭklido: ne povas esti pli ol kvin tutsimetriaj pluredroj. Rimarku en Tab. 1, ke sesedro (kubo) kaj okedro havas ĉiu 12 eĝojn, kaj ke dekduedro kaj dudekedro havas ĉiu 30 eĝojn. Ĉu estas rilato inter la du membroj de ĉiu grupo? Jes. Ĉiu membro de paro estas inverso de la alia: la nombro de facoj ĉe unu estas la nombro de verticoj ĉe la alia. Sesedro havas 6 facojn kaj 8 verticojn, kaj okedro havas 8 facojn kaj 6 verticojn, kaj ĉiu havas 12 eĝojn.

Simile, dekduedro havas 12 facojn kaj 20 verticojn, kaj dudekedro havas 20 facojn kaj 12 verticojn, kaj ĉiu havas 30 eĝojn. Sekvas, ke oni povus enskribi (desegni ene) sesedron en okedron tiel, ke ĉiu vertico de la sesedro estas la mezpunkto de ĉiu faco de la okedro, kaj oni povas enskribi okedron en sesedron tiel, ke ĉiu faco de la okedro estas la mezpunkto de ĉiu kvadratfaco de la sesedro. Fakte, oni povus senfine enskribi en okedron: sesedron, okedron, sesedron, okedron k.t.p., kaj ankaŭ inverse. Oni povas simile trakti la paron dekduedro kaj dudekedro.

Kaj kio pri la kvaredro? Ĉu partnero mankas? Tute ne. Tiu figuro havas kvar facojn kaj kvar verticojn. Do, la inverso de la kvaredro estas alia kvaredro. Inĝenieroj, inklude de *Alexander Graham Bell* [2] kaj *Buckminster Fuller* [3], jam delonge havis grandan intereson pri kvaredroj. Analoge al trilateroj en dudimensia geometrio, kvaredroj estas la plej simplaj kaj ankaŭ la plej stabilaj el la pluredroj. Oni povas krei aliajn pluredrojn el kombinaĵoj de kvaredroj. El ĉiuj tridimensiaj figuroj, simetria kvaredro havas la malplej grandan volu-

---

[2] Oni povas vidi tutan ĉambron plenplenan de diversaj kvaredroj en Muzeo *'Alexander Graham Bell'* en *Baddeck*, Nov-Skotio, Kanado. La muzeo mem estas konstruita laŭ formo de kvaredro. La vizitanto tuj konvinkiĝas, ke la fama inventisto havis multajn interesojn, ne nur pri telefonoj.

[3] En 1985 tri ĥemiistoj (*Richard E. Smalley, Robert F. Curl jr.* kaj *Sir Harold W. Kroto*) eltrovis novan (trian) formon de karbono: molekulo el multaj karbonatomoj aranĝitaj kvazaŭ ĉe la verticoj de diversaj pluredroj. La grupo nomiĝas "fulerenoj", honore al *Buckminster Fuller*, inventinto de la geodezia kupolo. Unu el tiuj karbonmolekuloj estas "bukminsterfulereno" ($C_{60}$), en kiu ĉiu karbonatomo estas ĉe vertico de la pluredro, kio rezultas, se oni sekcas ĉiun el la 12 verticoj de dudekedro (12 oble 5 = 60). Oni ŝerce nomas tiun formon "Bukipilko" pro ties simileco al piedpilko.

menon proporcie al la surfaco (kaj sfero – ankaŭ simetria figuro – havas la plej grandan).

Se oni simetrie sekcas (tratranĉus) verticon de kvaredro, sesedro aŭ dekduedro, la kversekco estas trilatero. Fig. 4 A montras la rezulton de tratranĉo de vertico de sesedro (kubo) – la kversekco montras trilateron. Se oni sekcas verticon de okedro, la kversekco montras kvadraton (Fig. 4 B). Se oni tratranĉas verticon de dudekedro, la kversekco estas pentagono.

| Geometria figuro | Nombro da lateroj ĉe kversekco de vertico | Inverso | Nombro da lateroj ĉe ĉiu faco de la inverso |
|---|---|---|---|
| kvaredro | 3 | kvaredro | 3 |
| sesedro (kubo) | 3 | okedro | 3 |
| okedro | 4 | sesedro (kubo) | 4 |
| dekduedro | 3 | dudekedro | 3 |
| dudekedro | 5 | dekduedro | 5 |

**Tabelo 2**

Oni povas vidi la rilatojn en Tabelo 2. Estas kvazaŭ tratranĉo de vertico montras facon de la inverso (de interna pluredro). Pluredroj (ne nur Platonaj) montriĝas la formo de multaj aferoj en la naturo: kristaloj, molekuloj, eĉ atomoj. La antikvaj grekoj en sia mistikismo eraris pri multaj detaloj, sed ili ĝuste divenis, kiam ili studis simetriajn pluredrojn kaj asignis la ĉefformojn el la strukturo de naturo al la Platonaj korpoj, la plej perfektaj el ĉiuj.

## Dankesprimo

Mi tre dankas al d-ro *Hein Wernik*, kiu bonkore korektis la gramatikon

## Bibliografio

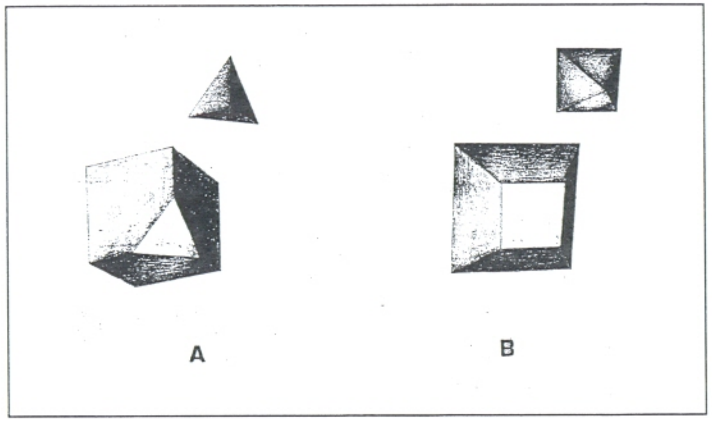
*Ball W.W. Rouse & Coxeter H.S.M.* (1987). *Mathematical Recreations and Essays*, 13-a eldono. *Dover Publications, Minesola, N.Y.*, 1987.

*Devlin Keith*: *The Language of Mathematics. Making the Invisible visible. W.H.Freeman and Company, New York, N.Y.*, 2000.

*Encyclopaedia Britannica Online* (abonservo atingebla per la interreto).

*Fuller R. Buckminster & Loeb Arthur L.*: *Explorations in the Geometry of Thinking Synergetic. MacMillan Publ. Co., Inc., New York, N.Y.*, 1985.






**Figuro 4**

*Gardner Martin: Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions. University of Chicago Press, Chicago,* 1987.

*Jacobs Harold R.: Mathematics, A Human Endeavor. W.H. Freeman and Comp., San Francisco*, 1970.

La Plena Ilustrita Vortaro de Esperanto: Sennacieca Asocio Tutmonda, Parizo, 2005.

## Adreso de la aŭtoro

*Prof. Stevens T. NORVELL jr.*
*2, Windermere Rd*
*CA – H a l i f a x* NS B3N 1M9
KANADO
<stevens.norvell@dal.ca>

## Priaŭtora informo

La aŭtoro estas emerita profesoro pri ĥirurgio. Li naskiĝis en Usono en la jaro 1923, diplomiĝis (kun honoro) en medicino ĉe la Universitato de *Illinois /Chicago* en la jaro 1947, kaj estis familia kuracisto dum 5 jaroj. Li fariĝis kanadano en la jaro 1956. Li studis ĥirurgion dum 8 jaroj ĉe la Universitato de *Alberta*/Kanado kaj en *Colchester*/Britio. Li instruis en la Medicina Fakultato de la Universitato *Dalhousie* en *Halifax*/Kanado, de 1961 ĝis 1993. Li interesiĝis pri kancero kaj melanomo kaj kontribuis 50 artikolojn al la medicina literaturo. Li esperantistiĝis en la jaro 1938 kaj aperigis multajn artikolojn en Esperanto pri tre diversaj temoj. Prof-ro *Norvell* estas honora membro de Universala Esperanto-Asocio (UEA).