

SCIENCA REVUO oficiala organo de ISAE
Vol. 34 (1983) N-ro 1 (143): matematika kajero

Eldonanto: Internacia Scienca Asocio Esperantista (ISAE)

Ĉefredaktoro: *RNDr. Josef Kavka, CSc., Lužná 7, CS-160 00 Praha 6 — Vokovice, Ĉeĥosl.*

Redaktoro de la matematika kajero: *Dr. Václav Hník, CSc.*

Grafika redaktoro: *Bruĉjo Kasini, «Edistudio», c. p. 213, I-56100 Pisa, Italujo*

Administranto por la pagipovaj landoj: «Edistudio», pĉk 12230561, Italujo

Administranto por la nepagipovaj landoj: *Dr. Václav Hník, CSc., Fakulta architektury ČVUT, Thákurova 7 — CS-166 34 Praha 6 — Dejvice, Ĉeĥoslovakio*

Kompostis: «Composit», *via Giordano Bruno 8, I-56100 Pisa, Italujo*

Enpaĝigis: «Edistudio», c.p. 213, I-56100 Pisa, Italujo

Presis: *Tecnostampa coop r.l., Pisa Italujo*

Reguloj por la aŭtoroj:

1. Verki laŭeble pri sia propra originala esplorado tiel, ke ĝin komprenu eĉ alifakaj sciencistoj;
2. Sendi al la ĉefredaktoro la tekston en 2 ekzempleroj, klare tajpitaj sur maldika papero;
3. Maŝinskribi normallitere en la tajp-areo de 165 mm × 250 mm, kun la liniado 1¹/₂, t.e. kun 40 linioj surpaĝe;
4. Ĉiun vorton neesperantan substreki ondinie (por la kursiva komposto), dum rektlinia substreko signifas komposton dikliteran;
5. En la teksto noti lokojn, kie troviĝu eventualaj figuroj;
6. Ne forgesi referenc-liston;
7. Aldoni koncizan resumon en sia gepatra lingvo.

Estraro de ISAE:

Prezidanto: Prof. D-ro Carl Stóp-Bowitz, *Camilla Colletts vei 3, N- Oslo 2, Norvegio*

Vicprezidantoj: Prof. Sin'itirō Kawamura, *424-7 Kinasityō Huzii, Takamatu, 760, Japanio*

Prof. Vasil Peevski D-ro hc., *Gogol 9, BG-1504 Sofia, Bulgario*

Ĝenerala sekretario: Ing. Christian Darbellay, *Jostenallee 45, D-4040 Neuss 1, FRG*

Sekretario-kasisto: Prof. Paul E. Kustaanheimo, *Danmarks Tekniske Højskole, 040 DIA-E, DK-2800 Lyngby, Danlando*

Aliaj estraranoj: S-ro Rüdiger Eichholz, *direktoro de TC-ISAE, R.R.I, Bailieboro, Ontario, KOL 1B0, Kanado*

D-ro W.A. Verloren Van Themaat, *direktoro de IC-ISAE, Volkerakstraat 38^l, NL-1079 XT Amsterdam, Nederlando*

D-ro Josef Kavka CSc., *Lužná 7, CS-160 00 Praha 6 — Vokovice, Ĉeĥoslovakio*

S-ro Bruĉjo Kasini, *c. p. 213, I-56100 Pisa, Italujo*

D-ro Václav Hník CSc., *Podjavorinské 1609/6, CS-149 00 Praha 4 — Chodov, Ĉeĥoslovakio*

D-ro Gerhard Kalckhoff, *Schuckertstraße 14/XI, D-8000 München 70, F.R. Germanio*

Figuroj okaze de hazarda intersekcado de korpo kun ebena

*Václav Hník (Ĉeĥoslovakio)**

1. Enkonduko

Grava diagnoza tasko de mineralogo, petrologo, ĥemiisto k.a. estas determini eksteran kristallimigon. Solvo de ĉi geometria-kristalografia tasko estas pli simpla, se temas pri minerala individuo, pli malpli izolita aŭ facile apartigebla el sia medio. Tamen, praktike oni renkontiĝas kun agregatoj, konsistantaj el granda nombro da kristaloj, ĉu sammineralaj, ĉu plurmineralaj.

Precipe la petrologo bazas siajn esplorojn sur observado de rokaĵosekcaj mikropreparatoj. Premise, ke la kristaloj, konsistigantaj rokaĵon, ne estas ordigitaj laŭ iu maniero, ĉiun el ili ĥarakterizas en la sekcaĵo difinitaj relativaj nombro kaj speco de ebenaj figuroj (ekz. trianguloj, kvaranguloj k.t.p.). Inverse, la relativa nombro kaj speco de ĉi figuroj helpas determini la kristallimigon, do ankaŭ la kristalografian apartenon de koncerna mineralo.

Relativa frekvenco de tiuj ebenaj figuroj neniel dependas de egalaj kristalgrandecoj enkadre de la preparato. Aliflanke necesas, ke la preparato disponigu al la observanto sufiĉe grandan nombron da kristalindividoj de ekzamenata mineralo.

Jen'a traktaĵo konsideras la pure matematikan alpaŝon al la problemo: **determini la relativan frekvencon kaj specon de planimetriaj figuroj, kiuj estiĝas, se stereometrian korpon sekcas hazarde orientitaj kaj lokitaj ebenaĵoj.**

2. Ĝenerala solvo

En spacan korpon ni loku koordinatsistemon de tri reciproke ortaj aksoj x, y, z . Direkto de ajna ebena estas difinita per normalrekto, kiu pasas tra la

* doktoro de natursciencoj, kandidato de fizikaj-matematikaj sciencoj, *Fakulta architektury ČVUT, Thákurova 7, 166 34 PRAHA 6*

nulpunkto (centro) de la sistemo kaj ortas al tiu ebena. Direkton de ĉi normalo determinas la anguloj $\varphi \in (0; 2\pi)$, $\psi \in (0; \frac{\pi}{2})$ (v. fig. 1). Estu $\vec{n}(a; b; c)$ la

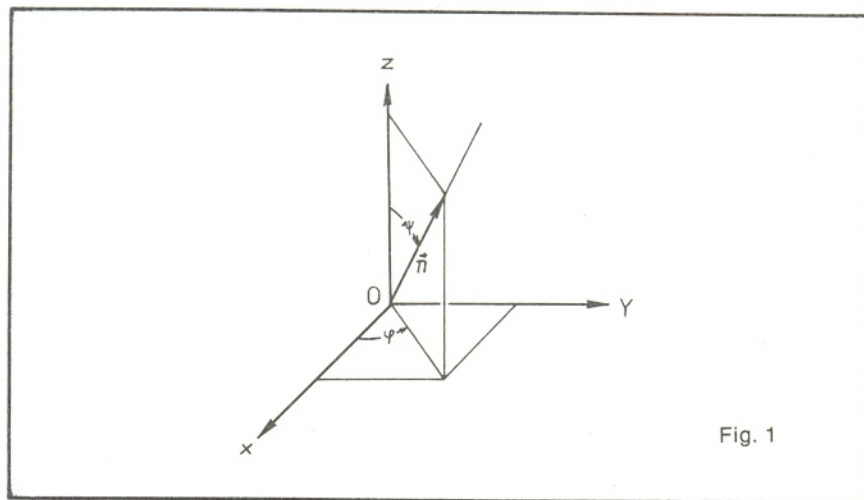


Fig. 1

vektoro, orta al la ebena k (t.e. la vektoro de la normalo), $\vec{r}_0$ la pozicia vektoro de iu fikse elektita punkto A en la ebena k , $\vec{r}(x; y; z)$ la pozicia vektoro de variabla punkto P de la sama ebena k (v. fig. 2). Tiuokaze la vektoro $\vec{AP} = \vec{r} - \vec{r}_0$ situas en la ebena k , do ortas al $\vec{n}$. La skalara produkto de la du reciproke ortaj vektoroj egalas al nul, do validas

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0, \text{ t.e.} \\ \vec{r} \cdot \vec{n} - \vec{r}_0 \cdot \vec{n} = 0.$$

Se ni signas la konstanton $-\vec{r}_0 \cdot \vec{n}$ per d , validas:

$$\vec{r} \cdot \vec{n} + d = 0, \text{ t.e.} \\ ax + by + cz + d = 0,$$

kio estas la ĝenerala ekvaciformo de l'ebena en la tridimensia spaco. La termojn ax , by , cz oni nomas linearaj, dum d estas termo absoluta.

Ni konsideru alian ebenon k' , paralelan kun k , do ebenon kun la sama

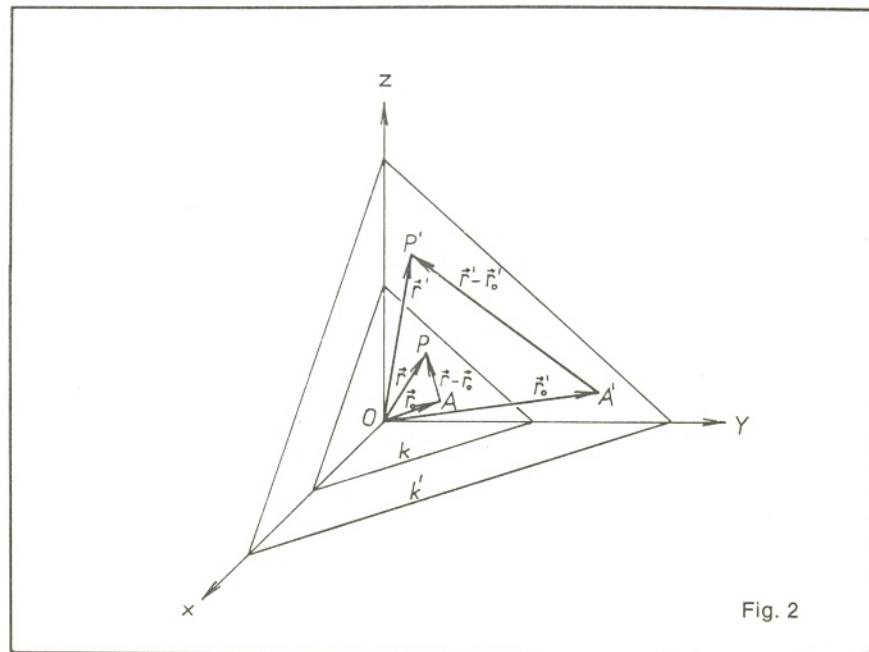


Fig. 2

normalvektoro. Ankaŭ ĉi-okaze ni elektu fiksan punkton A' en la ebena k' kaj ties pozician vektoron $\vec{r}'_0$, arbitran punkton P' en la ebena k' samkiel ties pozician vektoron $\vec{r}'(x'; y'; z')$. Plue ni difinu vektoron $\vec{m} = \vec{AA'} = \vec{r}'_0 - \vec{r}_0$. Tiam evidente validas:

$$(\vec{r}' - \vec{r}'_0) \cdot \vec{n} = \vec{r}' \cdot \vec{n} - \vec{r}'_0 \cdot \vec{n} = \vec{r}' \cdot \vec{n} - (\vec{r}_0 + \vec{m}) \cdot \vec{n} = \vec{r}' \cdot \vec{n} - \vec{r}_0 \cdot \vec{n} - \vec{m} \cdot \vec{n} = \vec{r}' \cdot \vec{n} + d - |\vec{m}| |\vec{n}| \cos \alpha,$$

kie α estas angulo, kiun fermas la vektoroj $\vec{m}$ kaj $\vec{n}$. La vektoron $\vec{n}$ ni elektu tiel, ke $|\vec{n}| = 1$. Tiuokaze

$$\vec{n} = (a; b; c) = (\sin \psi \cos \varphi; \sin \psi \sin \varphi; \cos \psi)$$

(v. fig. 1) kaj $|\vec{m}| |\vec{n}| \cos \alpha = |\vec{m}| \cos \alpha = m$,

kie m estas la distanco inter k kaj k' . Do k' havas jenan ekvacion:

$$\vec{r}' \cdot \vec{n} + d - m = ax' + by' + cz' + d - m = 0,$$

en kiu x' , y' , z' estas la koordinatoj de arbitra punkto P de l'ebena k' .

Jen akiriĝis rezulto, por ni tre grava: okaze de du paralelaj ebenoj kun la unuo-normalvektoro, la absoluta valoro de la diferenco inter la absolutaj termoj en iliaj ekvacioj $|d - d'|$ indikas la distancon inter tiuj ebenoj.

- Estu jenaj: 1. spaca korpo (ekz. kristalo)
 2. koordinatsistemo kun la tri ortaj aksoj x, y, z
 3. aro da paralelaj ebenaĵoj, determinitaj per sia unu-normalvektoro $\vec{n}$.

Se ni sukcesos trovi, ke por ebenaĵoj kun la absoluta termo en la ekvacioj d ĝis d' , la sekcaĵo inter tiuj ebenaĵoj kaj la konsiderata korpo prezentas difinitan ebenan figuron, tiam $|d-d'|$, do $d-d'$ aŭ $d'-d$, indikas frekvenc-gradon de tiu figuro rilate al ĉiuj eblaj figuroj, generitaj de ĉiuj ebenaĵoj kun la normalvektoro $\vec{n}$. Tiel eblas sinsekve akiri frekvenc-gradon de ĉiuj aperantaj figuroj, generitaj de l'aro da paralelaj ebenaĵoj.

Por akiri la tutan apergradon de l' ebenaj figuroj por ĉiuj eblaj ebendirektoj, ni devas la grandon $d-d'$ (eventuale $d' - d$) integri en ĉiuj direktoj:

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\frac{\pi}{2}} (d-d') \sin\psi \, d\varphi \, d\psi.$$

Okaze de konkreta kalkulo estas avantaĝe, se oni lokas la koordinatsisteman centron en la simetricentron (se ĝi ekzistas) de la korpo kaj la tri koordinatajn aksojn orienti laŭ la simetriaksoj (se ili ekzistas) de la korpo. Sekve la kalkulo plisimpliĝas tiom, ke ne estas necese integri — konsidere la korpsimetriaĵon — en la tuta amplekso: $\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $\psi \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$.

2.1. Kubo (heksaedro)

En la centron de kubo, kies eĝlongo egalas al 2, estas lokita la koordinatsistemo kun la tri aksoj paralele al la kubaĵoj (v. fig. 3). El la kubsimetrio rilate la koordinatsistemon sekvas, ke el ĉiuj eblaj direktoj de normalo al ebenaĵo sufiĉas konsideri sole tiujn, okaze de kiuj la normalrekto sekcas la kubon interne de la triangulo AFG . Jen la koordinatoj de grava punktaro kaj apude la valoroj absoluttermaj el la ekvacioj de l' ebenaĵoj, pasantaj tra la koncerna punktaro. (Tiujn valorojn ni ricevos per substituo de la punkto-koordinatoj en la eben-ekvacion $ax + by + cz + d = 0$).

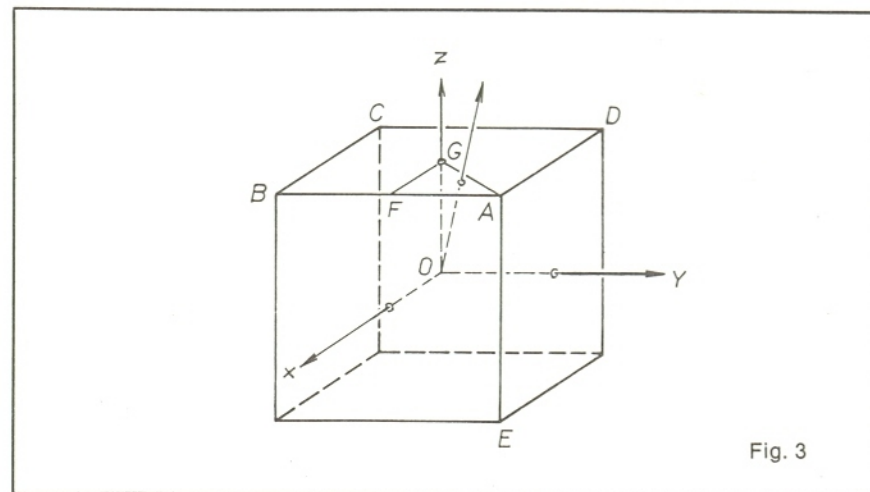


Fig. 3

$A = (1; 1; 1)$	$d_A = -a-b-c$
$B = (1; -1; 1)$	$d_B = -a+b-c$
$C = (-1; -1; 1)$	$d_C = a+b-c$
$D = (-1; 1; 1)$	$d_D = a-b-c$
$E = (1; 1; -1)$	$d_E = -a-b+c$
$O = (0; 0; 0)$	$d_O = 0$

Estu ajna normalrekto, sekanta la kubon interne de la triangulo AFG , tiam validas $\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{4} \rangle$, $\psi \in \langle 0; \arccot(\cot \varphi) \rangle$. La valoro $\psi = \arccot(\cot \varphi)$ respondas al la normalrekto, sekanta la kubon en la streko AF ; eblas determini ĝin ekz. tiel, ke el aro da paralelaj ebenaĵoj kun ĉi normalrekto ekzistas por donita φ ĉiam unu ebenaĵo, pasanta tra ambaŭ punktoj D kaj E . Tiuokaze $d_D = d_E$, aliforme

$$\begin{aligned} a-b-c &= -a-b+c \\ a &= c \\ \sin\psi \cos\varphi &= \cos\psi \\ \cos\varphi &= \cot\psi \\ \psi &= \arccot(\cot \varphi). \end{aligned}$$

El la paralelaj ebanoj, determinitaj per normalo, sole iuj sekcos la kubon, nome tiuj, kies ekvacia d-valoru estas en la intervalo $\langle -a-b-c; a+b+c \rangle$ t.e. $^2 - \sin\psi (\cos\varphi + \sin\varphi) - \cos\psi; \sin\psi (\cos\varphi + \sin\varphi) + \cos\psi$. La valoro $-a-b-c = d_A$ respondas al tiu ebano, kiu pasas tra la punkto A , la valoro $a+b+c$ respondas al tiu ebano, kiu pasas tra la punkto kun la koordinatoj $(-1; -1; -1)$. Pro la centrosimetrio de la kubo laŭ O (la nulpunkto koordinatsistema) sufiĉas konsideri la solan intervalon de l'absoluttermoj $\langle -a-b-c; 0 \rangle$ t.e. la tutan aron de ebanoj inter tiuj, kiuj pasas tra la punkto A kaj tra la koordinatsistema nulpunkto O .

Nun ni determinu sinsekvon, laŭ kiu per ĉi ebenaro sekciĝos la unuopaj gravaj kubopunktoj, kaj specojn de ebenaj figuroj, aperontaj kiel intersekcaĵoj de ĉi ebenaro kun la kubo. Tiun difinon ni plenumos, se ni pligrandigos la absolutterman valoron laŭgrade ekde $-a-b-c$ ĝis nul.

La sinsekvo de l' unuaj tri punktoj evidente jenos: A, B, D . Plua vicordo dependos de la normaldirekto. Por $\psi < \text{arckot}(\cos\varphi + \sin\varphi)$ ĝi estos C, O , por $\psi > \text{arckot}(\cos\varphi + \sin\varphi)$ ĝi estos E, O . Okaze de $\psi = \text{arckot}(\cos\varphi + \sin\varphi)$ ja por ĉiu φ ekzistas unu ebano, pasanta tra ambau punktoj C kaj E . Sekve validas:

$$\begin{aligned} d_C &= d_E \\ a+b-c &= -a-b+c \\ a+b &= c \\ \sin\psi(\cos\varphi + \sin\varphi) &= \cos\psi \\ \cos\varphi + \sin\varphi &= \cot\psi \\ \psi &= \text{arckot}(\cos\varphi + \sin\varphi). \end{aligned}$$

La supra kubedro dispartiĝas do laŭ fig. 4. La ortan triangulon FGH , al kiu respondas la normaldirekto $\varphi \in (0; \frac{\pi}{4})$, $\psi \in (0; \text{arckot}(\cos\varphi + \sin\varphi))$, ni nomas regiono K , dum regionon L prezentas la tringulo AFH , al kiu respondas la normaldirekto $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2})$, $\psi \in (\text{arckot}(\cos\varphi + \sin\varphi); \text{arckot}(\cos\varphi))$.

Por la ebenaro, kies normalrekto trapasas la supran kubedron en la regiono K , la sinsekvo de la punktoj estas A, B, D, C, O ; en la regiono L estas A, B, D, E, O . En tab. 1 demonstriĝas:

- distanco de l' ebanoj, pasantaj tra l' opaj gravaj punktoj por la donita direkto (= diferenco inter la absoluttermoj el la ekvacioj de ĉi ebanoj);
- integralo de tiuj valoroj tra ĉiuj direktoj rilataj al la regionoj K kaj laŭ L ;

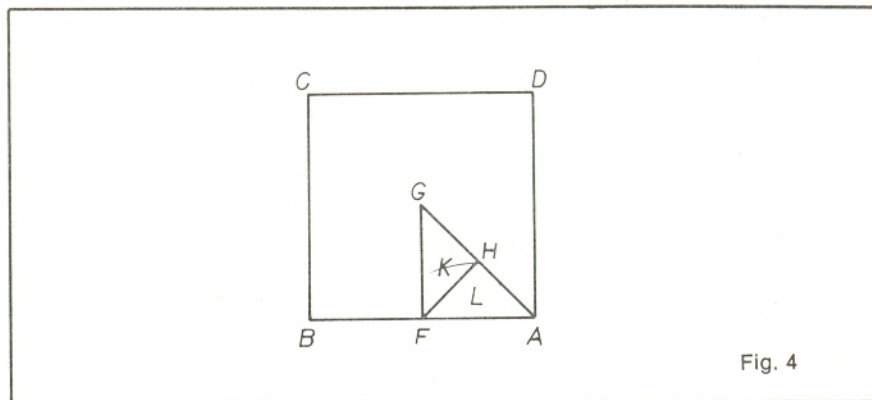


Fig. 4

— speco de ebenaj figuroj, generitaj pro l' intersekado de l' ebanoj kun la kubo.

Devenigon de l' ebenfiguraj specoj prezentas fig. 5 kaj 6. La kalkulo de la duobla integralo estas — helpe de la fubina* teoremo — transformita en la kalkulon de la du integraloj simplaj. La integralado laŭ ψ estas plenumita analitike, tiu laŭ φ numere per la simpsona* metodo.

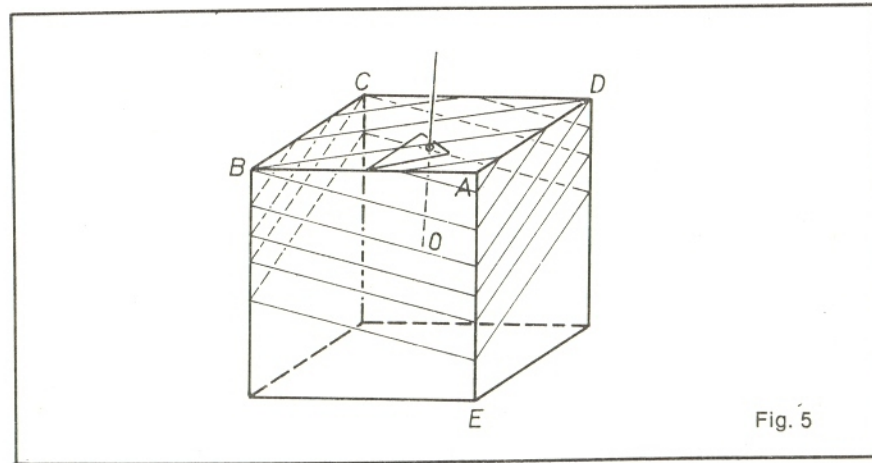


Fig. 5

* laŭ G. Fubini (1879-1943), itala matematikisto

* laŭ T. Simpson (1710-1761), brita matematikisto

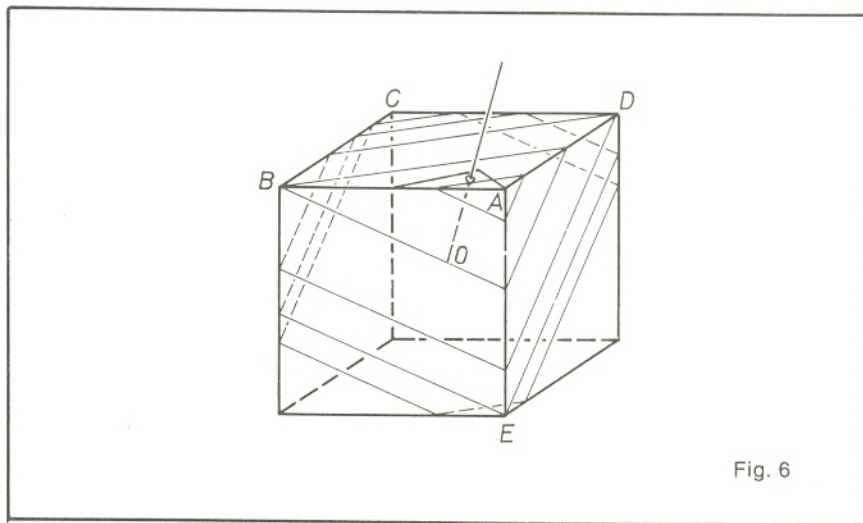


Fig. 6

La rezulto estas prezentita en tab. 2.

Tab. 1

regiono, en kiu la normalrekto sekcas la supran kubegon	la areoj da ebenoj limigas tiuj ebenoj, kiuj pasas tra la punktoj	distanco de la lim-ebenoj (pasantaj tra la punktoj X kaj Y) ($=d_Y - d_X$)	$\int (d_Y - d_X) \cdot \sin\psi \, d\varphi \, d\psi$	speco de ebena figuro
$K + L$	A, B	$2b = 2\sin\psi \sin\varphi$	0,109887	trianguloj
$K + L$	B, D	$2a - 2b = 2\sin\psi(\cos\varphi - \sin\varphi)$	0,130414	trapezoj
K	D, C	$2b = 2\sin\psi \sin\varphi$	0,047880	kvinanguloj
K	C, O	$-a - b + c = \cos\psi - \sin\psi \cdot (\sin\varphi + \cos\varphi)$	0,060751	paralelogramoj
L	D, E	$-2a + 2c = 2(\cos\psi - \sin\psi \cos\varphi)$	0,025519	kvinanguloj
L	E, O	$a + b - c = \sin\psi(\sin\varphi + \cos\varphi) - \cos\psi$	0,018240	sesanguloj

Tab. 2.

speco de ebena figuro	relativa frekvenco en %
trianguloj	27,98
kvaranguloj	33,21
trapezoj	15,47
paralelogramoj	18,69
kvinanguloj	4,64
sesanguloj	

2.2. Oktaedro

La tuta kalkulo estas analogia kiel okaze de la kubo, do ni povas ekspliki ĝin koncize.

En la centro de la regula oktaedro kun la eĝlongo 2 estas lokita la nulpunkto de la koordinatsistemo, orientita laŭ fig. 7. La koordinatoj de gravaj punktoj samkiel la d -valoroj el la ekvacioj de l' ebenoj, pasantaj tra ĉi punktoj, jenaj:

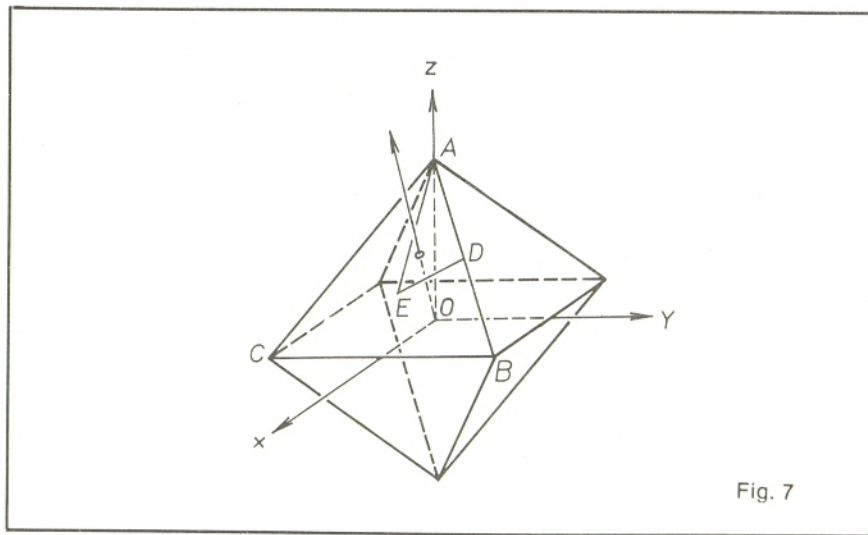


Fig. 7

$$\begin{aligned}
 A &= (0; 0; \sqrt{2}) & d_A &= -\sqrt{2} c \\
 B &= (1; 1; 0) & d_B &= -a-b \\
 C &= (1; -1; 0) & d_C &= -a+b \\
 O &= (0; 0; 0) & d_O &= 0
 \end{aligned}$$

El la simetrio rezultas, ke el ĉiuj eblaj normaldirektoj sufiĉas konsideri sole tiujn, okaze de kiuj la normalrekto sekcas la oktaedron en la triangulo ADE . (La punkto D situas en la centro de la streko AB , dum la punkto E situas en la mascentro de la triangulo ABC .) Por tiuj direktoj validas:

$$\varphi \in (0; \frac{\pi}{4}), \psi \in (0; \text{arkkot } \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\sqrt{2}}).$$

La valoro $\psi = \text{arkkot } \frac{\cos\varphi + \cos\varphi}{\sqrt{2}}$, kiu determinas la direkton ekde S ĝis la streko DE , eblas trovi el tio, ke por ĉiuj tia direkto ekzistas unu ebena kun ĉi normalrekto, nome ebena, pasanta tra ambaŭ punktoj A kaj B . Sekve

$$\begin{aligned}
 d_A &= d_B \\
 -\sqrt{2} c &= -a-b \\
 \sqrt{2} \cos\psi &= \sin\psi(\cos\varphi + \sin\varphi) \\
 \cot\psi &= \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\sqrt{2}} \\
 \psi &= \text{arkkot } \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

La punkto-vicordo por ĉi normalrekto evidentas: A, B, C, S . La rezultojn montras tab. 3 kaj 4. (Devenigon de l'ebenfiguraj specoj v. sur fig. 8)

aron da ebenaĵoj limigas ebenaĵoj, pasantaj tra la punktoj	distanco de la limebenaĵoj (pasantaj tra la punktoj X kaj Y) ($= d_x - d_y$)	$\int (d_x - d_y) \cdot \sin\psi d\varphi d\psi$	speco de la ebena figuro
A, B	$-a-b+\sqrt{2}c = -\sin\psi(\cos\varphi + \sin\varphi) + 2\cos\psi$	0,137822	kvaranguloj
B, C	$2b = 2\sin\psi\sin\varphi$	0,092216	sesanguloj
C, O	$a-b = \sin\psi(\cos\varphi - \sin\varphi)$	0,077702	sesanguloj

Tab. 4.

speco de l'ebena figuro	relativa frekvenco en %
kvaranguloj	55,21
sesanguloj	44,79

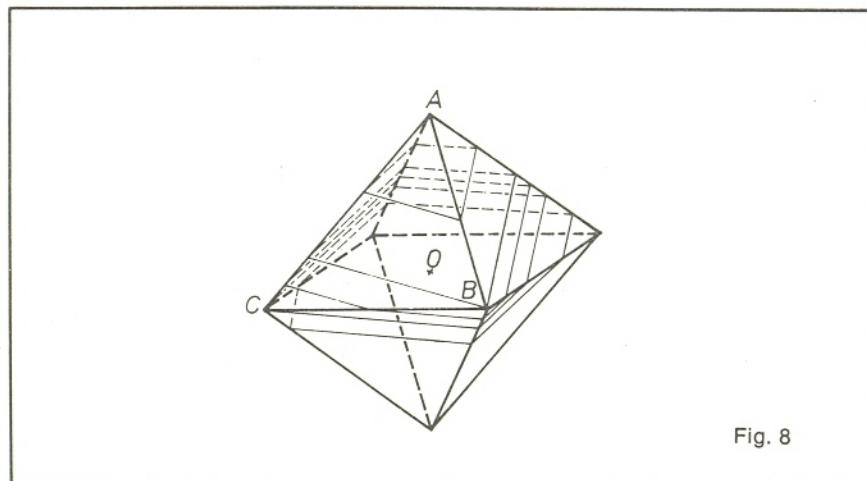


Fig. 8

Obrazce vzniklé protínáním tělesa s náhodnými rovinami

V této práci je popsána metoda, jak určit relativní četnost a druh planimetrických obrazců, které vzniknou, jestliže se protne těleso s rovinami náhodně rozmístěnými v prostoru. Jako míry zastoupení různých druhů planimetrických obrazců se použilo (po zintegrování ve všech směrech) vzdálenosti hraničních rovin, jimiž jsou odděleny roviny protínající prostorový útvar v jednotlivých druzích planimetrických obrazců. Na příkladu krychle a pravidelného osmistěnu se metoda demonstruje konkrétním výpočtem. Výsledky mají význam např. při určování krystalových tvarů nerostů v horninových výbrusech.