Oficialaj informoj de *Akademio de Esperanto*

André Albault

Nova Serio, n-ro 1
Julio 1983

Sendependa lingvo-institucio fondita de d-ro *L.L. ZAMENHOF en 1905*

La Akademio elektis sian novan Estraron; ĝi konsistas el:
d-ro *André ALBAULT*, el *Toulouse*, Francio, Prezidanto;
prof. d-ro *Stojan ĜUĜEV*, el *Sofia*, Bulgario, Vic-prezidanto;
prof. d-ro *Paul NEERGAARD*, el *København*, Vic-prezidanto;
d-ro *Werner BORMANN*, el *Hamburg*, FR Germanio, Sekretario.

Nun baldaŭ la Akademio aranĝos la elekton de novaj Direktoroj por la diversaj Sekcioj, tiel ke ĝi povu plenumi la rolojn por kiuj Zamenhof kreis ĝin.

* D-ro *A. ALBAULT, 55-B, Arcs-St-Cyprien, F-31300 TOULOUSE*, Francio.

Uzo de bazaj figuroj kaj nova regulo en goniometrio

Jan Otto de Kat (Nederlando)

1. Enkonduko

Uzo de bazaj figuroj en la scienco povas esti tre grava. Ili povas gvidi al novaj plisimpligitaj komprenoj kaj krom tio signifas gravan malpliigon de la memorŝarĝo. Figuroj ja enhavas paralel-informon: dum unu momento oni povas superrigardi grandegan kvanton da informo, kiun oni povas pli poste revoki en la memoro per tio. Tiu ĉi kontraŭe al skribita teksto; ekzistas nur malmultaj homoj, kiuj povas ''legi'' skribitan tekston el la memoro. Sed figuroj povas esti elirpunktoj, kiuj helpas denove rekonstrui skribitan tekston. En la ĉi sekvanta verko ekzemplo de ĉi tio estas donata per la dedukto de serielvolvaĵo en goniometrio — per kiu ankaŭ estas enkondukata nova kalkulregulo por la determino de entjeraj potencoj de sinus- kaj kosinus-funkcioj. Krom tio estas donataj figuroj, per kiuj oni povas rememori gravajn formulojn, necesajn por la pruvo de la regulo.

2. Determino de pli altaj potencoj de sinus- kaj kosinus-funkcioj per duona *Pascal*-triangulo

Pli altaj potencoj de sinus- kaj kosinus-funkcioj estas aplikataj i.a. en la matematika formulado de distordo, kiu estas kaŭzata de nelineara transdonfunkcio de elektrontuboj aŭ transistoroj. Se ni prezentas tian transdonfunkcion per potencserio de la potenco n (n = entjero), tiam dum sinusforma ekscito ekestas elirtensio, en kiu troviĝas la n-a potenco de sinuso aŭ kosinuso,

* inĝeniero, ŝtat-oficisto en Laboratorio por Magneta Teĥniko, *Mekelweg 4, NL-2628 CD DELFT*

kaj el tiu ekestas la n-a harmono kiel la plej alta. Se oni scias la potencserion, tiam oni povas kalkuli el tio la produktadon de la harmonoj. Inverse oni povas determini la koeficientojn de la potencserio el mezuro de la harmonoj, ekz. per ondoanalizatoro.

Por la potencoj de sinus- kaj kosinus-funkcioj ni povas trovi en konsultlibroj ekz. jenajn formulojn:

$$\sin^{2n-1}x = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}}\left\{\sin(2n-1)x - \binom{2n-1}{1}\sin(2n-3)x + \ldots (-1)^{n-1}\binom{2n-1}{n-1}\sin x\right\}$$

$$\mathrm{kos}^{2n-1}x = \frac{1}{2^{2n-2}}\left\{\mathrm{kos}(2n-1)x + \binom{2n-1}{1}\mathrm{kos}(2n-3)x + \ldots + \binom{2n-1}{n-1}\mathrm{kos}\, x\right\}$$

$$\sin^{2n}x = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{(-1)^{n}}{2^{2n-1}}\left\{\mathrm{kos}\, 2nx - \binom{2n}{1}\mathrm{kos}(2n-2)x + \ldots (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}\mathrm{kos}2x\right\}$$

$$\mathrm{kos}^{2n}x = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}}\left\{\mathrm{kos}\, 2nx + \binom{2n}{1}\mathrm{kos}(2n-2)x + \ldots + \binom{2n}{n-1}\mathrm{kos}2x\right\} \tag{1}$$

Rekta dedukto de la serioj por $\sin^n x$ kaj $\mathrm{kos}^n x$ ankaŭ eblas laŭ la konataj formuloj el goniometrio:

$$\sin p \sin q = \frac{1}{2}\,\mathrm{kos}\,(p-q) - \frac{1}{2}\,\mathrm{kos}\,(p+q) \tag{2}$$

$$\sin p\, \mathrm{kos}\, q = \frac{1}{2}\,\mathrm{kos}\,(p-q) + \frac{1}{2}\,\mathrm{kos}\,(p+q) \tag{3}$$

El (2) sekvas por $p = q = x$:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{kos}\, 2x \tag{4}$$

Post tio validas $\sin^3 x = \sin x \sin^2 x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x\, \mathrm{kos}\, 2x$, kio per (3) transformiĝas ĝis:

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x \tag{5}$$

Se ni daŭrigu tion por kelkaj valoroj de n, kaj ankaŭ faru tion por $\mathrm{kos}^n x$, tiam ni trovas jenajn *Fourier*-elvolvaĵojn por $\sin^n x$ kaj $\mathrm{kos}^n x$ ($n = 1,2,3\ldots$):

Tab. 1

n			**$\sin^n x$**					
1		$\sin x$						
2	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}\mathrm{kos}\, 2x$					
3		$\frac{3}{4}\sin x$		$-\frac{1}{4}\sin 3x$				
4	$\frac{3}{8}$		$-\frac{4}{8}\mathrm{kos}\, 2x$		$+\frac{1}{8}\mathrm{kos}\, 4x$			
5		$\frac{10}{16}\sin x$		$-\frac{5}{16}\sin 3x$		$+\frac{1}{16}\sin 5x$		
6	$\frac{10}{32}$		$-\frac{15}{32}\mathrm{kos}\, 2x$		$+\frac{6}{32}\mathrm{kos}\, 4x$		$-\frac{1}{32}\mathrm{kos}\, 6x$	
7		$\frac{35}{64}\sin x$		$-\frac{21}{64}\sin 3x$		$+\frac{7}{64}\sin 5x$		$-\frac{1}{64}\sin 7x$

n	$\text{kos}^n\, x$
1	$\text{kos}\, x$
2	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{kos}\, 2x$
3	$\frac{3}{4}\text{kos}\, x + \frac{1}{4}\text{kos}\, 3x$
4	$\frac{3}{8} + \frac{4}{8}\text{kos}\, 2x + \frac{1}{8}\text{kos}\, 4x$
5	$\frac{10}{16}\text{kos}\, x + \frac{5}{16}\text{kos}\, 3x + \frac{1}{16}\text{kos}\, 5x$
6	$\frac{10}{32} + \frac{15}{32}\text{kos}\, 2x + \frac{6}{32}\text{kos}\, 4x + \frac{1}{32}\text{kos}\, 6x$
7	$\frac{35}{64}\text{kos}\, x + \frac{21}{64}\text{kos}\, 3x + \frac{7}{64}\text{kos}\, 5x + \frac{1}{64}\text{kos}\, 7x$

Kvankam korektaj, tiuj ĉi metodoj ne rapide gvidas al la celoj, dum ebleco pri memorigo de tiaj formuloj tute ne ekzistas. Tamen estas eble tuj noti la seriojn pri $\sin^n x$ kaj $\text{kos}^n x$ tute sen eksteraj helpiloj, se ni uzas kiel elirpunkton jenajn konsiderojn:

2.1. Komencu por n = 2 kaj n = 3 dedukton el grafikaĵo (Fig. 1).

Kiam ni desegnas grafikaĵon de la funkcio $y = \sin x$ (fig. 1, kontinua linio), tiam la funkcio $y = \sin^2 x$ en ĝi estas facile desegnebla. La pasejoj tra nulo de ambaŭ funkcioj ja koincidas, dum por $\sin x = +1$ validas: $\sin^2 x = +1$, kaj por $\sin x = -1$ same validas: $\sin^2 x = +1$, ĉar $(-1)^2 = +1$. Do la funkcio $y = \sin^2 x$ oscilas inter nulo kaj + 1 kun "duobla frekvenco"; la meza valoro estu $\frac{1}{2}$. Laŭ tiu rezonado ni povas dedukti el la figuro (v. la streketlinion en fig. 1):

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{kos}\, 2x$$

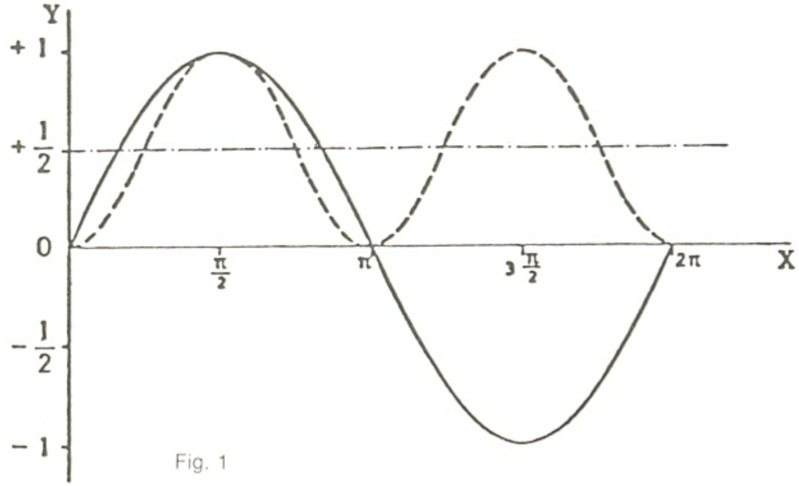

Fig. 1

Determinante la trian potencon de sin x ni denove komencas de la grafikaĵo de y = sin x (fig. 2, kontinua linio), en kiu ni nun konstrukciu la trian potencon. La pasejoj tra nulo denove koincidas, sed nun validas por $\sin x = -1$ ankaŭ $\sin^3 x = -1$, ĉar $(-1)^3 = -1$. Plue ĉie validas $|\sin^3 x| \leqq |\sin x|$, ĉar ĉie validas: $|\sin x| \leqq 1$.

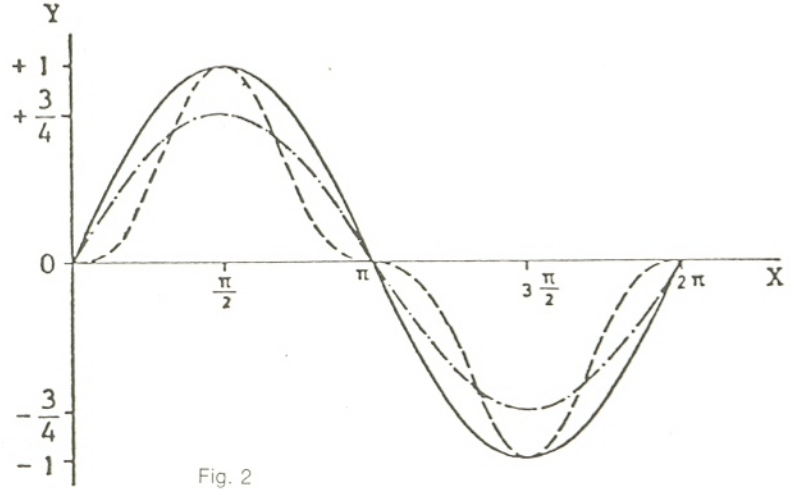

Fig. 2

Tiamaniere ekestas la streketlinia funkcio en fig. 2. Tiu ĉi funkcio oscilas ĉirkaŭ mezvaloro, kiu ankaŭ estas sinusforma, kontraŭe al la antaŭa okazo, en kiu oni facile povis rekoni tiun mezvaloron kiel la linio $y = \frac{1}{2}$. Nu tio iĝas: $y = \frac{3}{4}\sin x$ (fig. 2, streketpunkto-linio), en kiu la nombro $\frac{3}{4}$ estas la sola fakto en nia tuta rezono, kiun ni devas rememori. Se ni faras tion, tiam ni facile povas vidi el la figuro:

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin^3 x$$

Ni montras plue sen eskpliko la figurojn, per kiuj oni povas rememori la formulojn por $\cos^2 x$ kaj $\cos^3 x$ (fig. 3 kaj 4):

2.2. Regulo.

Pri la serioj por $\sin^n x$ kaj $\cos^n x$ (v. tab. 1) ni rimarkas jenon:

— La n-a potenco de sinuso kaj kosinuso elvolviĝas en *Fourier*-serion per

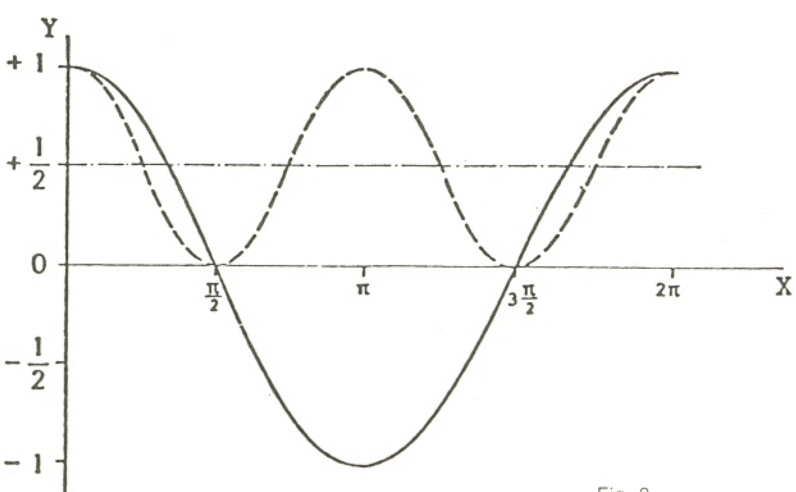

Fig. 3

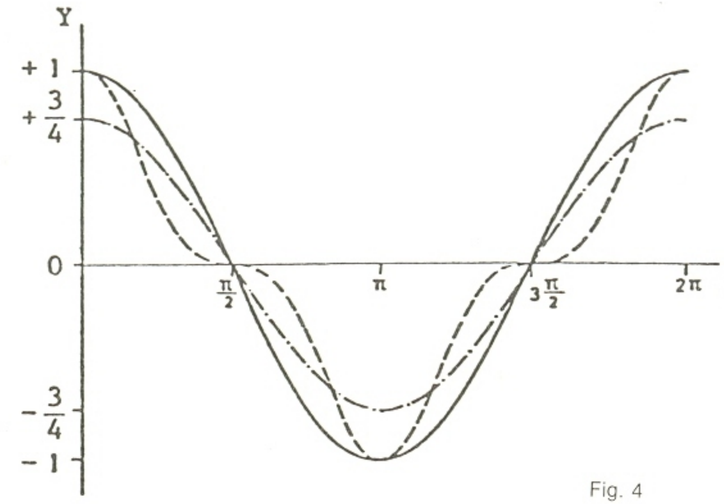

Fig. 4

sinusoj kaj kosinusoj kun kiel plej alta harmono sin nx aŭ kos nx.

Por $\sin^n x$ ni vidas: alternantan signon; paraj potencoj estigas seriojn kun kosinusoj, malparaj potencoj estigas seriojn kun sinusoj.

Por $\cos^n x$ validas: nur plussignojn kaj kosinusojn.

— La sumo de la absolutaj valoroj de la *Fourier*-koeficientoj = 1. Tiu sekvas el al fakto, ke ĉiam validas:

$$|\sin^n x| \leq 1 \qquad n = 1,2,3,\ldots$$
$$|\cos^n x| \leq 1$$

— Plue validas por la koeficientoj de la serioj, ke ili konsistas el frakcioj, el kiuj la **numeratoroj** povas esti determinataj el **duona** triangulo de Paskalo, dum la **denominatoroj** ĉiuj egalas la sumon de ĉiuj numeratoroj de unu serio (kaj ankaŭ egalas 2^n).

Triangulo de Paskalo:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & n & & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

sur tiu ĉi duoniga linio ekestas la duono kiel konstanto

Komparu la dekstran duonon de tiu ĉi Paskal-triangulo kun la koeficientoj de la seri-elvolvaĵoj de $\sin^n x$ kaj $\cos^n x$. La konstantoj devenas de la duoniga linio. Kun helpo de tiu ĉi regulo por ĉiu estas eble tuj noti la *Fourier*-serion por ĉiu entjera potenco de sinuso kaj kosinuso sen eksteraj helpiloj.

3. Pruvo.

La pruvon pri la ĝusteco de la uzo de Paskal-triangulo ĉi-okaze oni devas serĉi en la teorio pri funkcioj kun kompleksaj variabloj. La koeficientoj ĉe la seri-elvolvaĵoj por entjeraj potencoj de sinuso kaj kosinuso montras similecon al la duono de la binom-koeficientoj de Nevtono. Do evidentiĝas konsideri sinuson kaj kosinuson kiel binomon, kiu estas ebla per noti ilin kiel funkciojn kun kompleksaj variabloj:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \; ; \; \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad (6)$$

en kiu $\begin{cases} e = \text{la baznombro de la natura logaritmo.} \\ i = \sqrt{-1}. \end{cases}$

Laŭ Nevtono validas: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}.\, b^k$

en kiu: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\,(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$,

kiuj nombroj tuj estas noteblaj kiel "Triangulo de Paskalo" (v. 2.2.) kaj en kiu n = 0,1,2,... = potenco; k = 0,1,2,... = vicnombro de la seri-termoj ≦ n. Ni aplikas tion al la kompleksa binomo de sinusfunkcio per la substituoj $a = e^{ix}$, $b = e^{-ix}$:

$$\sin^n x = \frac{1}{(2i)^n}\left\{e^{ix} + (-1)e^{-ix}\right\}^n = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(n-k)x}.\,(-1)^k e^{-ikx} \qquad (7)$$

Skribu tion por kelkaj valoroj de n:

<u>n = 1</u>.

$$\sin x = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} e^{i(1-k)x}.\,(-1)^k e^{-ikx} = \frac{1}{2i}\left\{e^{ix} + (-1)e^{ix}\right\} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x.$$

<u>n = 2</u>.

$$\sin^2 x = \frac{1}{(2i)^2} \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} e^{i(2-k)x}.\,(-1)^k e^{-ikx} =$$

$$= \frac{1}{-4}\left\{ \underset{k=0}{e^{i2x}} + \underset{k=1}{2e^{ix}(-1)e^{-ix}} + \underset{k=2}{(-1)^2 e^{-i2x}} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{i2x}-2+e^{-i2x}\right) = \frac{1}{2} - \frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{kos}^2 x.$$

n = 3 .

$$\sin^3 x = \frac{1}{(2i)^3} \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} e^{i(3-k)x}.\,(-1)^k e^{-ikx} =$$

$$= \frac{1}{-8i}\Big\{ \underset{k=0}{e^{i3x}} + \underset{k=1}{3e^{i2x}(-1)\,e^{-ix}} + \underset{k=2}{3e^{ix}e^{-i2x}} + \underset{k=3}{(-1)^3 e^{-i3x}} \Big\} =$$

$$= \frac{1}{-8i}\left(\underset{k=0}{e^{i3x}} - \underset{k=1}{3e^{ix}} + \underset{k=2}{3e^{-ix}} - \underset{k=3}{e^{-i3x}} \right).$$

Ni nun devas, por pli altaj valoroj de n, kombini duojn da termoj, kiuj situas simetrie rilate al la mezo de la formo inter krampoj. Per tio ĉiam denove ekestas sinus- kaj kosinus-funkcioj. Tio klarigas, pro kio ni devas uzi la "duonan" Paskal-triangulon.

$$\sin^3 x = \frac{1}{-8i}\Big\{-3\big(\underset{k=1}{e^{ix}} - \underset{k=2}{e^{-ix}}\big) + \big(\underset{k=0}{e^{i3x}} - \underset{k=3}{e^{-i3x}}\big)\Big\} = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$$

Plue disvolvante tion ni povas per kompleta indukto pruvi la ĝustecon de la trovita kalkulregulo, kaj simile por $\mathrm{kos}^n x$.

Finfine estu rimarkate, ke la formulo (4) por $\sin^2 x$ inverse povas esti uzata por rememori la formulon (2):

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{kos}\,2x$$

$$\sin x \cdot \sin x = \frac{1}{2}\,\mathrm{kos}\,(x-x) - \frac{1}{2}\,\mathrm{kos}\,(x+x).$$

Anstataŭigo de la unua x per p, kaj la dua x per q produktas la formulon (2). Simile oni povas rememori la formulon por kos p. kos q el la formulo

$$\mathrm{kos}^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{kos}\,2x.$$

4. Unuo-cirklo en la kompleksa ebeno

Ankaŭ ekzistas geometriaj figuroj en la kompleksa ebeno, el kiuj tuj estas deriveblaj la gravaj formuloj (6), kiujn oni bezonas por pruvi la kalkulregulon. Ili sekvas el la formulo de Eŭlero:

$$e^{ix} = \mathrm{kos}\,x + i\,\sin\,x \tag{8}$$

Dedukton de tiu ĉi formulo oni povas efektivigi per apliko de la Mk-Laŭra seri-elvolvaĵo de la tri termoj:

El fig. 5 oni povas dedukti komenciĝon de potenc-serielvolvaĵo de la funkcio y = f(x) en la proksimeco de la Y-akso. Ni tuj vidas:

$$y = f(x) \simeq f(0) + f'(0) \cdot x = a_0 + a_1 x = a_0 x^0 + a_1 x^1 \tag{9}$$

Estas evidente serĉi pli bonan alproksimecon per progresigo de la serio:

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{10}$$

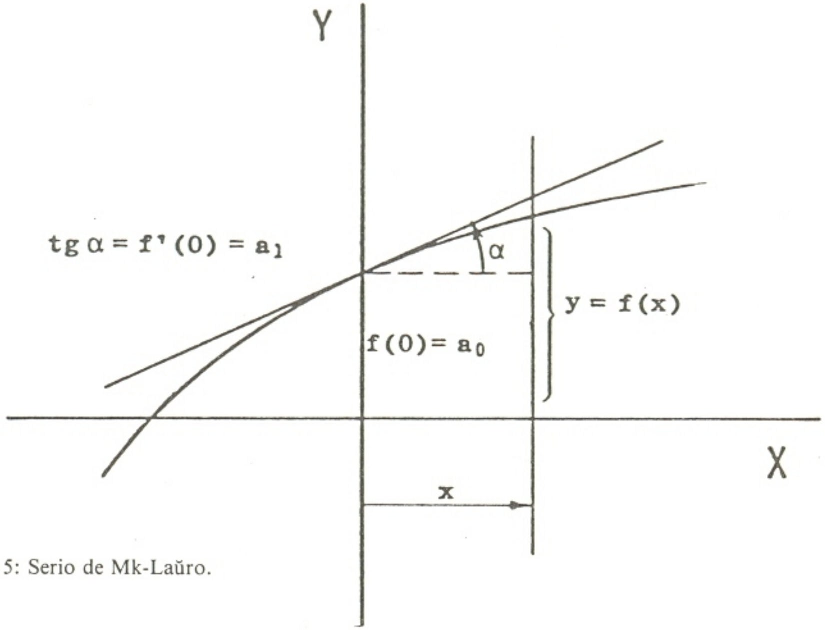

Fig. 5: Serio de Mk-Laŭro.

Oni povas trovi la koeficientojn per ripetita diferencialado:

$$\begin{array}{lllllll}
y^{(0)}(x) = f^{(0)}(x) = & a_0 + a_1x + & a_2x^2 + & a_3x^3 + & a_4x^4 & + \dots \\
y^{(1)}(x) = f^{(1)}(x) = & a_1 + & 2a_2x + & 3a_3x^2 + & 4a_4x^3 & + \dots \\
y^{(2)}(x) = f^{(2)}(x) = & & 2a_2 + & 2.3a_3x + & 3.4a_4x^2 & + \dots \\
y^{(3)}(x) = f^{(3)}(x) = & & & 2.3a_3 + & 2.3.4a_4x & + \dots \\
y^{(4)}(x) = f^{(4)}(x) = & & & & 2.3.4a_4 & + \dots \\
\cdot \quad \cdot & & & \cdot & & \\
\cdot \quad \cdot & & & \cdot & & \\
\cdot \quad \cdot & & & \cdot & &
\end{array}$$

Se ni substituas en la serio kaj ĝiaj derivaĵoj por x nulon, tiam sekvas:

$$a_0 = f^{(0)}(0); a_1 = f^{(1)}(0); a_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2}; a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!}; \dots$$

Ĝenerale:
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad (11)$$

Ni tiam povas noti kiel serion Mk-Laŭro, kompreneble kondiĉe, ke ĉiuj ĉi operacioj estas permesataj:

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad (12)$$

Apliku tion al la tri termoj de la eŭlera formulo:

$y = \text{kos } x$; $y = i \sin x$; $y = e^{ix}$; kun $i = \sqrt{-1}$:

$$y = \text{kos } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \qquad (13)$$

$$y = i \sin x = i\frac{x}{1!} - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!} - \dots \qquad (14)$$

$$y = e^{ix} = 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \dots \qquad (15)$$

Ni vidas, ke la dua membro de la lasta ekvacio egalas la sumon de la duaj membroj de ambaŭ antaŭantaj ekvacioj, per kio la formulo de Eŭlero estas deduktita. Tiu ĉi formulo estas geometrie desegnebla en la **unuo-cirklo en la kompleksa ebeno**, v. fig. 6. El tiu ĉi figuro la formulo de Eŭlero tuj estas perceptebla, ĉe kiu ni devas pripensi, ke adicio de kompleksaj nombroj estas **vektora** adicio. Ĉar validas por ĉiu reala valoro de x:

$$\sin^2 x + \text{kos}^2 x = 1 \qquad (16)$$

kiu rekte sekvas el la difinoj de sinuso kaj kosinuso en la unuo- cirklo en la kartezia ebeno, ni krom tio povas dedukti el la figuro, ke ankaŭ validas por ĉiu reala valoro de x:

$$| e^{ix} | = 1 \qquad (17)$$

Nun ni ankaŭ povas rekte dedukti el la unuo-cirklo en la kompleksa ebeno la kompleksajn formulojn (6) por kos x kaj sin x (v. fig. 7 kaj 8):

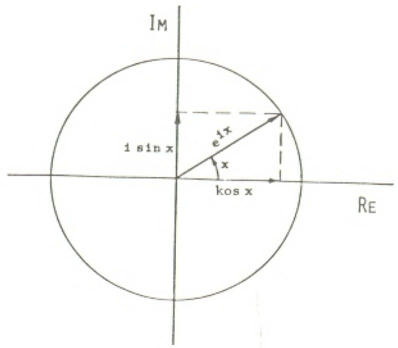

Fig. 6

Vektora adicio de e^{ix} kaj e^{-ix} estigas la rombon OACB, el kiu la horizontala diagonalo OC = $e^{ix} + e^{-ix}$ estas duonigata en D per la vertikala diagonalo AB. La maldekstra duono de OC estas OD = kos x (v. fig. 6). tiel ke 2 kos x = $e^{ix} + e^{-ix}$, per kiu la formulo (6) por kos x estas demonstrata.

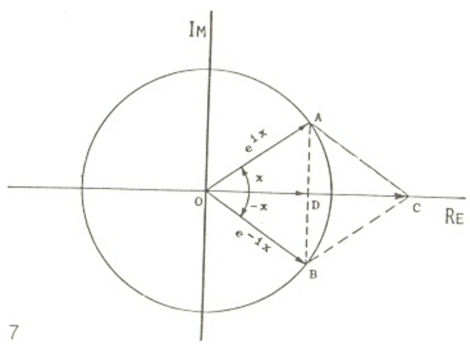

Fig. 7

Ni multiplikas la kompleksan nombron e^{-ix} en fig. 7 per (-1), per kiu ni trovas la punkton B′ en la fig. 8. Vektora adicio de e^{ix} kaj (-1) e^{-ix} rezultigas la rombon OACB′ en kiu la vertikala diagonalo OC = $e^{ix} + (-1)e^{-ix}$ estas duonigata per la horizontala diagonalo AB′. La malsupra duono de OC estas OD = i sin x (v. fig. 6), tiel ke:

$$2i \sin x = e^{ix} + (-1)e^{-ix}$$

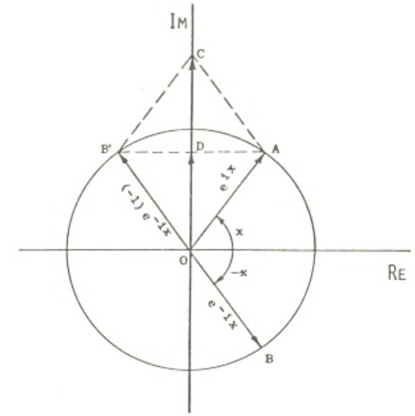

Fig. 8

per kiu la formulo (6) por sin x estas demonstrata.

Pri la pruvo de la regulo kun la duona Paskal-triangulo oni fakte devas montri, ke la nevtona binomo validas ankaŭ en la kompleksa ebeno.

Tiu estas farebla per la metodo de analiza progreso.