SCIENCA REVUO, vol. 34 (1983), n-ro 1 (143)

Metodo por trovi la nuliganto(j)n de enprogramigeblaj ekvacioj per mana komputoro.

Béla Medgyes (Hungario)*

La esenco de la metodo estas la kunigo de komputoro kaj de laŭcele konstruitaj grafikaĵoj, kiel ĝi estis jam skizita aliloke (*Medgyes* 1979). Unue ni montros la metodon okaze de algebraj entjeraj funkcioj kaj poste ni ĝeneraligos ĝin.

Laŭ la teoremo de *Ruffini-Abel* la formulon por la nuligantoj de la ĝenerala, n-grada ekvacio:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (a_n \geq 0) \qquad (1)$$

oni povas skribi en fermita formo por $n > 4$ nur tiam, se n havas specialajn valorojn, aŭ okaze de certaj interrilatoj aŭ valoroj de la koeficientoj (*Galois 1897*), kvankam laŭ la baza teoremo de algebro ĉiam ekzistas n-nombraj, ne nepre malsamaj nuligantoj, inter kiuj unu estas certe reala, se n estas senpara. (*Gauss* 1799).

Por trovi la proksimiĝantan valoron de reala nuliganto de ajna ekvacio en eksplicita formo donita oni povas uzi aŭ la metodon de *Newton*, aŭ la proceon, t.n. *regula falsi* (*Oblath* 1920), sed ĝenerale ili ne taŭgas por konstruado de relative simpla, do facile uzebla programo por komputoroj. Kiel konate, la metodo de *Newton* substituas la funkcion per ĝia tanĝanto kaj la *regula falsi* per sekcanto tra konvenaj punktoj, kiujn oni povas plej simple trovi helpe de grafikaĵo.

Por nia celo ni skribu la formulon (1) en la formo:

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n = 0 \qquad (2)$$

kie $b_i = \dfrac{a_{n-i}}{a_n}$. Per a_n ni povas ĉiam dividi, ĉar ni premisis, ke $a_n \neq 0$.

* fizikisto, *Arany J. n. 9, H-1051 BUDAPEST*

Nun ni povas skribi la maldekstran flankon de (2) kiel funkcion de x en la sekvontan formon:

$$y = f(x) = \{[(x+b_1)x + b_2]x + \ldots + b_{n-1}\}x + b_n \tag{3}$$

Ĉi-tiun formon ni jam povas tre facile programigi en ĉiujn manajn komputorojn. Tion farinte, ni donas konvenajn valorojn al x tiel, ke la diferenco estu potenco de 10. Do estu: $x_k - x_{k-1} = 10^p$, kie p estas pozitiva aŭ negativa entjero, aŭ eĉ nulo. Nun helpe de la komputoro per ĉiu valoro x_k ni elkalkulas la respektivan valoron $y_k = f(x_k)$ kaj elserĉas tiujn valorojn x inter kiuj la signo de y varias. Ĉi tiuj valoroj x estu x_r kaj x_{r+1}. Sed laŭ la teoremo de *Bolzano* (1817) inter x_r kaj x_{r+1} troviĝas nuliganto, kies proksimiĝantan valoron ni povas determini grafike per la sekvonta metodo. Estu ekz. $y_r = f(x_r) > 0$ kaj $y_{r+1} = f(x_{r+1}) < 0$. Ni prezentas ĉi-tiujn valorojn sur milimetre dividita — aŭ eĉ sur kvadratita — papero tiel, ke sur la absciso x_r estu nulo kaj x_{r+1} egalu 10. Nun ni kunligas la punktojn y_r kaj y_{r+1} per rekta linio, kiu sekcu la abscison inter x_s kaj x_{s+1}, kie $x_{s+1} - x_s = 10^{p-1}$. Nun per la komputoro ni elkalkulas la valorojn $y_s = f(x_s)$ kaj $y_{s+1} = f(x_{s+1})$ kaj prezentas ilin sur la sama grafikaĵo. Kunligante la respektivajn punktojn, ni ricevas la abscisojn x_t kaj x_{t+1}, inter kiuj la signo de $y_t = f(x_t)$ kaj $y_{t+1} = f(x_{t+1})$ malsamas. Sed nun $x_{t+1} - x_t = 10^{p-2}$! Tio signifas, ke daŭrigante la skizitan proceđon, ni povas determini la nuliganton paŝo post paŝo ĉiam per unu cifero pli precize.

Ekz. ni determinu la nuligantojn de la ekvacio:

$$135\,x^5 + 293\,x^4 - 202\,x^3 - 56\,x^2 - 6\,x + 2 = 0.$$

Unue ni transskribu ĝin en formon similan al (3), por ke ĝi estu pli simple enprogramigebla:

$$y = (\{[(135\,x + 293)x - 202]\,x - 56\}\,x - 6)\,x + 2.$$

Nun ni elkalkulas la valorojn de y por kelkaj, laŭcele elektitaj valoroj de x:

x	—10	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3
y	-10^7	-2.10^6	-5.10^5	—4102	1774	312	2	166	7158	5.10^4

El ĉi tiu tabelo videblas, ke la funkcio devas havi nuliganton inter —3 kaj —2. Krome ni povas konjekti nuligantojn inter nul kaj plus unu, ĉar tie devas esti minimumo, kiu estas eble negativa. Vere, se ni subdividas la intervalon, ni trovas la sekvontajn valorojn:

x	0,1	0,2	0,5	0,7	0,8
y	0,67	—2.54	—17,7	—5,9	22

Kiel konjektite, en tiu intervalo ekzistas vere du nuligantoj.

Per helpo de la skizita metodo, la pli preciza determinado de la nuligantoj estas jam simpla afero. Helpe de mana komputoro nun ni elkalkulas la valorojn y ĉiam por tiuj valoroj x inter kiuj la rekta linio en nia grafikaĵo sekcas

Tab. 1: Elkalkulado de la tri realaj nuligantoj de la ekvacio.

$$135\,x^5 + 293\,x^4 - 202\,x^3 - 56\,x^2 - 6\,x + 2 = 0$$

x	y	x	y	x	y
—2	$1,77\cdot 10^{3}$	0,1	0,67	0,7	$-0,59\cdot 10$
—3	$-4\cdot 10^{3}$	0,2	—2,54	0,8	$2,2\cdot 10$
—2,3	$1,69\cdot 10^{3}$	0,12	0,19	0,72	$-19,0\cdot 10^{-1}$
—2,5	$1,08\cdot 10^{3}$	0,13	—0,08	0,73	$3,9\cdot 10^{-1}$
—2,6	539				
—2,7	—214	0,127	$0,17\cdot 10^{-2}$	0,728	$8,1\cdot 10^{-2}$
		0,128	$-2,6\cdot 10^{-2}$	0,729	$15,3\cdot 10^{-2}$
—2,67	36				
—2,68	—45	0,1270	$1,7\cdot 10^{-3}$	0,7283	$-10,5\cdot 10^{-3}$
		0,1271	$-1,0\cdot 10^{-3}$	0,7284	$12,9\cdot 10^{-3}$
—2,674	3,7				
—2,678	4,3	0,12706	$0,4\cdot 10^{-4}$	0,72834	$-11,6\cdot 10^{-4}$
		0,12707	$-2,4\cdot 10^{-4}$	0,72835	$11,8\cdot 10^{-4}$
—2,6744	0,52				
—2,6745	—0,29	0,127061	$12\cdot 10^{-6}$	0,728344	$-2,2\cdot 10^{-4}$
		0,127062	$-15\cdot 10^{-6}$	0,728345	$0,1\cdot 10^{-4}$
—2,67446	$3,8\cdot 10^{-2}$				
—2,67447	$-4,3\cdot 10^{-2}$	0,1270614	$1\cdot 10^{-6}$	0,7283449	$-11,9\cdot 10^{-6}$
		0,1270615	$-2\cdot 10^{-6}$	0,7283450	$11,4\cdot 10^{-6}$
—2,674464	$5,3\cdot 10^{-3}$				
—2,674465	$-2,8\cdot 10^{-3}$				
—2,6744646	$4,3\cdot 10^{-4}$	$x_2 = 0,12706143_3$		$x_3 = 0,72834495$	
—2,6744647	$-3,8\cdot 10^{-4}$				
$x^1 = -2,67446465_2$					

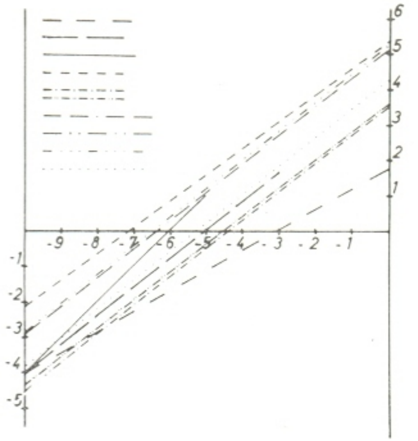

Fig. 1: Determinado de la unua nuliganto de la ekvacio: $135x^5 + 293x^4 - 202x^3 - 56x^2 - 6x + 2 = 0$

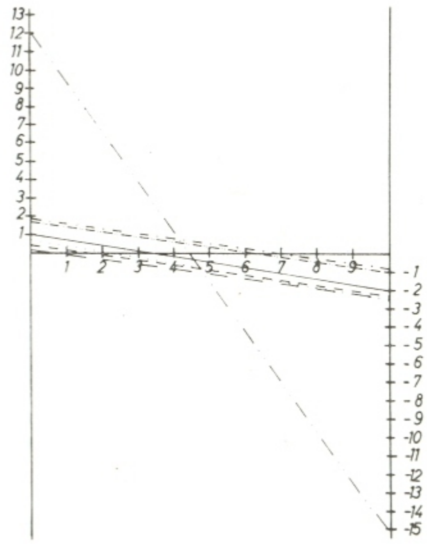

Fig. 2: Determinado de la dua nuliganto de la supra kvinagrada ekvacio.

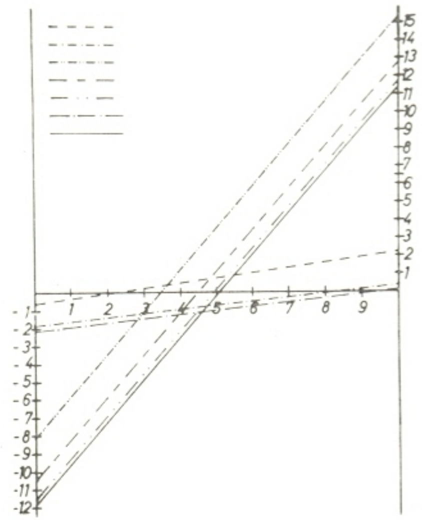

Fig. 3: Determinado de la tria nuliganto de la supra kvinagrada ekvacio.

la akson x. Ĉi-tie ni devas rimarki, ke povas okazi pro la ankoraŭ trokruda divido de la absciso, ke la substituo de la kurbo per rekta linio ne estas ĝusta kaj tiel la elkalkulitaj valoroj y havas saman signon. Sed ĉi-okaze ni ĉiam vidas el al grafikaĵo, en kiu direkto ni devas serĉi la ĝustajn novajn valorojn x.

La elkalkulitajn laŭnombrajn valorojn por nia kvinagrada ekvacio ni povas vidi en la sekva tabelo kaj en la tri grafikaĵoj. (Tab. 1; Fig. 1,2,3).

Sed kvinagrada ekvacio povas havi, ne nepre malsamajn nuligantojn. El nia unua, kruda kalkulado ni jam povas konjekti, ke la pluaj nuligantoj ne povas esti realaj, ĉar la kurbo tro krute kreskas post $x = 2$. Vere se ni dividas nian ekvacion per $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, ni ricevas la rezulton:

$$135\,x^2 + 47{,}43\,x + 8{,}07 = 0,$$

kies diskriminanto estas vere negativa: —2108.

Nun la ĝeneraligo de la metodo por iaj ajn enprogramigeblaj ekvacioj, eksplicite donitaj, estas simpla afero. Ekz. ni elkalkulu la faman konstantan de la forŝoviĝa leĝo de *Wien*.Ĝi estas la nuliganto de la transcenda ekvacio. (*Joss* 1959):

$$\frac{x\,e^x}{e^x-1}=5$$

Se ni skribas ĝin en la sekva formo:

$$e^x(x-5)+5=0,$$

ni povas ĝin tuj facile enprogramigi kaj solvi, kiel montras tab.2.

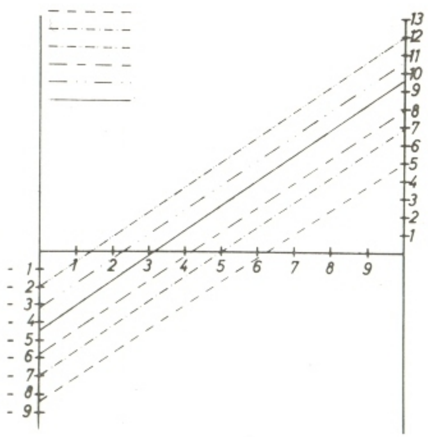

Fig. 4: Determinado de la nuliganto de la transcenda ekvacio: $x\,e^x=5(e^x-1)$

Tab. 2: Determinado de la konstanto de *Wien*.

x	y	x	y
4,9	—8,4	4,96511	$-5{,}8\cdot10^{-3}$
5	5	4,96512	$8\cdot10^{-3}$
4,96	—0,7	4,965114	$-3{,}2\cdot10^{-5}$
4,97	0,68	4,965115	$10{,}6\cdot10^{-5}$
4,965	—0,02	4,9651142	$-4{,}4\cdot10^{-6}$
4,966	0,12	4,9651143	$9{,}5\cdot10^{-6}$
4,9651	—0,002	$x = 4{,}96511423_2$	
4,9652	0,012		

Kiel alian ekzemplon ni solvos la ekvacion de *Kepler*, kiu estas tre grava en astronomio. Ĝia ĝenerala formo estas jena (*Kovalevsky* 1963):

$$x-\epsilon\sin x=M.$$

kie: $0<\epsilon<1$ kaj M estas laŭplaĉa reala numero. Ekz. estu $\epsilon=0{,}25$ (la numera discentreco de la orbito de Pluto) kaj $M=10$. Do ni serĉas la nuliganton de la ekvacio:

$$x-0{,}25\sin x-10=0.$$

Ni povas sekvi la kalkuladon en tab. 3 kaj fig. 5.

Kiel la ekzemploj montras, la esenco kaj la vera avantaĝo de la proponita metodo estas la samtempaj aplikoj de la rapideco de la komputoro kaj tiu de la tre rapida homa decido helpe de grafikaĵo. La precizeco de la metodo ĉiam egalas tiun de la komputoro.

Tab. 3: **Solvo de la ekvacio de** *Kepler:* $x - 0{,}25 \sin x - 10 = 0$.

x	y	x	y
9	$-11\ .10^{-1}$	9,8882	$-4{,}7.10^{-5}$
10	$1{,}4.10^{-1}$	9,8883	$7{,}5.10^{-5}$
9,8	$-10{,}8.10^{-2}$	9,88823	$-10{,}3.10^{-6}$
9,88824	$1{,}9.10^{-2}$	0,88824	$1{,}9 \cdot 10^{-6}$
9,88	$-10{,}1.10^{-3}$	9,888238	$-5{,}5.10^{-7}$
9,89	$2{,}2.10^{-3}$	9,888239	$6{,}7.10^{-7}$
9,888	$-2{,}9.10^{-4}$	9,8882384	$-6{,}0.10^{-8}$
9,889	$9{,}3.10^{-4}$	9,8882385	$6{,}0.10^{-8}$
$x = 9{,}88823845$			

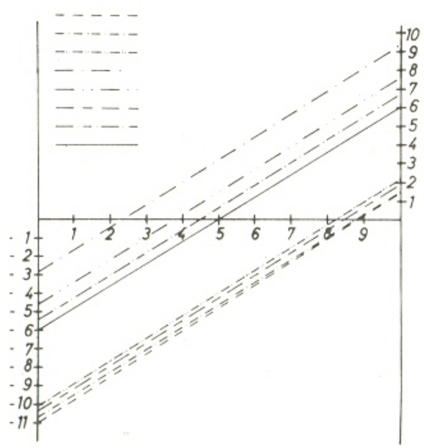

Fig. 5: Determinado de la nuliganto de la ekvacio de *Kepler*.

Referencoj

Bolzano, B. (1817): Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. — Oswald's Klassiker, 153. Prag.

Galois, E. (1897): Oeuvres mathématiques d' Evariste Galois. — Paris.

Gauss, C.F. (1799): Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores primi vel secundi gradus resolvi posse. — Helmstadt.

Joos, G. (1959): Lehrbuch der theoretischen Physik. — Leipzig.

Kovalevsky, J.(1965): Introduction à la mécanique céleste. — Paris.

Medgyes, B. (1979): Tetszöleges fokszámu algebrai egészfüggvények zérushelyeinek közelitö meghatározása kézi számitógép segitségével. — Energiagazdálkodás, 20, 8, 365-367. Budapest.

Oblath, R. (1920): Analizis és geometriai alkalmazásai. — Pudapest.

Beprogramozható egyenletek zérushelyeinek meghatározása kézi számitógép segitségével.

Az y = f(x) alakban adott egyenletet kézi számitógépbe programozzuk, majd a gép segitségével megkeressük, hogy nagyságrendileg x mely értékei között vált y elöjelet. A géppel kiszámitott y értékeket milliméter, vagy kockás papiron ábrázolva és az értékeket egyenessel összekötve megkeressük, hogy x = 0 és 10 megfelelö kitevöjü hatványa között hol történik a jelváltás. Igy mindenegyes lépéssel eggyel több tizedesre tudjuk a függvény keresett zérushelyét meghatározni. A módszer lényege a számitógép gyorsaságának és a grafikus ábrázolásnak segitségével elérhetö pillanatszerü emberi döntésnek az összekapcsolása.