Ĉu eblas kun gelernantoj malkovri novajn teoremojn pri kvaranguloj?

Jan GÓROWSKI, Maciej KLAKLA & Adam ŁOMNICKI

En la artikolo "Karakterizaj ecoj de la egallateraj trianguloj" en Scienca Revuo SR 1/2011, ni prezentis i.a. la teoremon kaj ties pruvon, ke nur en la egallatera triangulo sin kovras la centroj de la cirkloj – ĉirkaŭskribita kaj enskribita, ligitaj kun tiu triangulo.

Ni nun serĉos analogajn problemojn, analogajn teoremojn kaj ties pruvojn.

Facile estas demonstri ekz. kun gelernantoj de mezlernejoj, ke en kvadrato sin kovras la centroj de la cirkloj – ĉirkaŭskribita kaj enskribita – ligitaj kun tiu kvadrato.

Ĉu vera estas la teoremo iusence inversa? Ni volus starigi la problemon, ĉu tiun econ de kvadrato havas ankoraŭ alia kvarlatero.

Unue ni rimarku, ke kompreneble ne ĉiu kvarlatero havas la cirklon enskribitan, same ne ĉiu havas la cirklon ĉirkaŭskribitan.

Do en la matematika tasko por konkludi, ni fiksu jenajn premisojn:

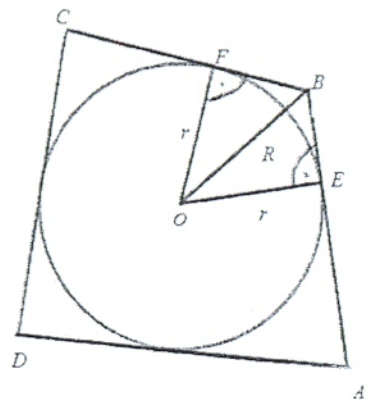
Ni premisu, ke la kvarlatero $ABCD$ havas – ligitajn kun si – cirklon enskribitan kaj cirklon ĉirkaŭskribitan kaj ke la centroj de tiuj cirkloj sin kovras.

Tuj venas la konjekto, ke tiu kvarlatero estas regula, ke ĝi estas kvadrato.

Ni fiksu la simbolojn, kiel sur la desegno 1.

Facile oni povas rimarki, ke la trianguloj OEB kaj OBF kongruas. La kvarlatero $ABCD$ konsistas do el ok ortangulaj trilateroj, kiuj kongruas. Sekve la trilateroj OAB, OBC, OCD, ODA kongruas kaj estas izocelaj. La kvarlatero $ABCD$ estas do kvadrato.

Tiamaniere, trovante la analogion kun por ni konata teoremo pri la triangulo (teoremo pri karakteriza eco de la egallatera triangulo), ni malkovris la **teoremon 1: nur en kvadrato la centroj de enskribita cirklo kaj ĉirkaŭskribita cirklo, ligitaj kun ĝi, sin kovras.**



Desegno 1

Ni provu starigi la problemon pli ĝeneralan. Kompreneble sin kovras la centroj de la cirkloj enskribita kaj ĉirkaŭskribita, ligitaj kun la regula n-latero.

Ĉu tiu eco estas karakteriza por la regulaj n-lateroj?

Ni fiksu la premisojn: $n \geq 3$, la n-latero $A_1A_2A_3...A_n$ estu tia, ke posedas la enskribitan cirklon kaj la ĉirkaŭskribitan cirklon kaj tiuj cirkloj havas komunan centron O.

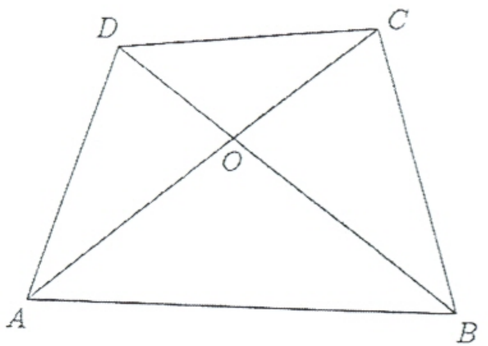
Facile ni povas rimarki, ke tiu n-latero konsistas el $2n$ ortangulaj trianguloj, kiuj kongruas, sekve la trianguloj OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA_nA_1 kongruas kaj estas izocelaj.

La n-latero $A_1A_2A_3...A_n$ estas do regula.

Tiamaniere ni malkovris la **teoremon 2.**

Kompreneble sperta matematikisto tuj starigus la ĝeneralan problemon kaj trovus la solvon – malkovrus la ĝeneralan teoremon. En la lerneja vivo – ŝajnas al ni – nepra estas pli trankvila aktivigado de lernanto: unue analogio kaj poste ĝeneraligo, se tiu ĝeneraligo estas ebla kaj ne estas tro malfacila.

Nun ni okupiĝos pri la pli malfacila problemo, gvidanta al malkovro de la nova teoremo pri kvarlateroj. Ni fiksu la simbolojn kaj difinojn, ligitajn kun la konveksa kvarlatero $ABCD$ (desegno 2).



Desegno 2

La diagonaloj AC kaj BD de tiu kvarlatero, havantaj la komunan punkton O, permesas difini kvar triangulojn: AOB, BOC, COD kaj DOA, kiujn en ĉi tiu artikolo ni nomos la **trianguloj faktoraj** de la kvarlatero $ABCD$.

Ni akceptu jenajn simbolojn, por la trianguloj faktoraj, havantaj pluajn atributojn:

w_1 - kiam la perimetroj de la trianguloj faktoraj estas egalaj,

w_2 - kiam kongruas la cirkloj ĉirkaŭskribitaj sur ili,

w_3 - kiam kongruas la cirkloj enskribitaj en ili,

w_4 - kiam kongruas la altoj de ili, havantaj la komunan verticon O,

w_5 - kiam kongruas la medianoj de ili, havantaj la komunan verticon O,

w_6 - kiam kongruas la segmentoj de la dusekcantoj de iliaj anguloj, havantaj la komunan verticon O.

Teoremo 3

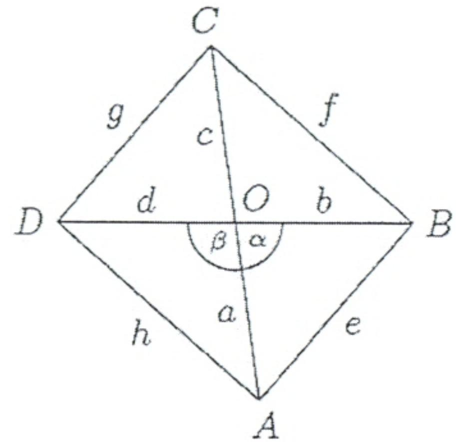
Se la trianguloj faktoraj de la konveksa kvarlatero $ABCD$ havas iun el la atributoj w_1 ĝis w_7 (aŭ ĉiun el tiuj atributoj), la kvarlatero $ABCD$ estas rombo.

Pruvo, kiam la premiso estas w_1:

Ni fiksu la simbolojn, kiel sur la desegno 3 (tiun desegnon ni ricevis aldonante sur la desegno 2 la simbolojn de la longoj de la segmentoj kaj por $\alpha + \beta = \pi$ premisante, ke $\beta \geq \frac{\pi}{2}$).

La premiso de nia teoremo estas:

$$a+b+e=b+c+f=c+d+g=a+d+h.$$



Desegno 3

Ne limigante la ĝeneralecon de la rezonado, ni povas aldoni la premison $\beta \geq \alpha$.

Sekve $\cos\beta \leq 0$. Eblaj estas tri kazoj: $a < c$, $a > c$, $a = c$.

Se $a < c$, tiam $f > e$ ĉar

$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\beta \geq b^2 + c^2 > b^2 + a^2 - 2ab\ \cos\alpha = e^2$,

pro tio, ke $\cos\beta \leq 0$, $\cos\alpha \geq 0$. En tiu kazo ni ricevis do $c+d+f > a+b+e$, kaj tio estas kontraŭdira kun la premiso de la teoremo.

Se $a > c$, ni ricevas - sekvante la saman vojon de la rezonado – la antinomion kun la premiso $a+d+h = c+d+g$.

Ebla do estas nur la kazo $a = c$.

Tial, pro tio ke $a+b+e = c+b+f$ ni ricevas $e = f$. La triangulo ABC estas do izocela kaj la segmento OB estas ĝia alto.

La diagonaloj AC kaj BD de la paralelogramo $ABCD$ **estas do ortaj**.

Sin apogante sur la supra rezonado kaj la simetrio de la premisoj (aŭ rezonante analoge post la distingo de la kazoj $d < b$, $d > b$, $d = b$) ni venas al la konkludo, ke la diagonaloj AC kaj BD krucigas ĉe siaj mezoj.

La kvarlatero $ABCD$ estas do rombo.

La pruvojn de la teoremo kun la premisoj $w_2 - w_6$ oni povas trovi en niaj artikoloj (1995 j, 1996 j).

Ni rimarku, ke la teoremo inversa al la supre priskribita estas evidente vera.

Tial ĉiu el la atributoj $w_1 - w_6$ povus servi por difini la rombon.

Referencoj

Górowski J., Klakla M., Łomnicki A. (1995). O czworoboku wypukłym, Gradient **7-8**, 218-232

Górowski J., Klakla M., Łomnicki A. (1996). Jeszcze o czworoboku wypukłym, Gradient **1 – 2**, 14 – 25

Górowski J., Klakla M., Łomnicki A. (1997). O pewnych własnościach czworokąta wypukłego, Matematyka **4**, 206 – 209

Górowsk, J., Klakla M., Łomnicki A.: 2004, Zadania „na wymuszanie" jako środek matematycznej aktywizacji uczących się, Dydaktyka Matematyki **26**, 61 – 80

Krygowska Z. (1972). Jak uczyć dowodzenia twierdzeń, Matematyka **5**, 264 – 275

Krygowska Z. (1977). Zarys dydaktyki matematyki, cz. II, WSiP, Warszawa

Adresoj de la aŭtoroj

Dr. Jan Górowski
Str. Na stoku 2
32 087 Penkowice
Pollando
<jangorowski@interia.pl>

Dr. Adam Łomnicki
Str. Bielowicza 53
32 040 Świątniki Górne
Pollando
<alomnicki@poczta.fm>

Prof.dr.hab. Maciej Klakla
Str. Sądowa 7
31 542 Krakow
Pollando
<smklakla@ap.krakow.pl>

Priaŭtoraj informoj

Jan Górowski kaj *Adam Łomnicki* estas doktoroj de matematiko kaj laboras en la Pedagogia Universitato en Krakovo (Pollando). Ĉiu el ili skribis pli ol 80 sciencajn artikolojn kaj lernolibrojn. *A.Łomnicki* estas esperantisto, instruisto de tiu lingvo.

Maciej Klakla, matematikisto, laboras kiel profesoro en la Pedagogia Universitato en Krakovo, skribis pli ol 130 sciencajn artikolojn kaj lernolibrojn.

Ĉu Turkoj povas lerni Esperanton?

– La artikolo –

Gerald Tucker

La lingvosistemo de la turka havas nur nedifinan, Esperanto nur difinan, la rusa neniun kaj la aliaj lingvoj de la studo **kaj** difinan **kaj** nedifinan artikolon.

Plej proksimaj al la turka estas la rusa lingvo kaj Esperanto en ĉi tiu punkto.

Pro la jam menciitaj „malfacilaĵoj" de la rusa estas por turko eble jam beno, ke tiu lingvo ne havas artikolon.

Kvankam la rilato kun Esperanto estas „renversa", lernanta turko havas du avantaĝojn ĉe la Internacia Lingvo:

1. La artikolo de Esperanto estas preskaŭ neŝanĝebla (la / l').

2. Turko povas lerni pere de Esperanto la fundamentan uzadon de la difina artikolo en hindeŭropaj lingvoj.

Por prijuĝi la ceterajn lingvojn, estas sencoplene denove kompari la nombron da lernendaj elementoj en la diversaj cellingvoj.

La nedifina artikolo

Lingvo	vira sing.	ina sing.	n. sing.	vira plur.	ina plur.	n. plur.
angla	*a(n)*	*a(n)*	*a(n)*			
Esperanto	-	-	-			
franca	*un*	*une*	- *(un)*			
germana	*ein* *eines* *einem* *einen*	*eine* *einer*	*ein* *eines* *einem*			
hispana	*un(o)*	*una*	- *(un(o))*	*unos*	*unas*	- *(unos)*
turka	*bir*	*bir*	*bir*			
rusa	-	-	-			