Strategiaj ludoj

Jan Górowski[*], Adam Łomnicki[†], Jerzy Żabowski[‡]

La deziro rego de nombraj ludoj ofte antaŭenigas la matematikon. En tiu ĉi artikolo ni diskutas, kiel per simpla matematiko ni povas kompreni la meĥanismojn de simpla nombra ludo. Ni komencas per la plej simpla varianto de la ludo kaj poste traktos pli ĝeneralan varianton.

1 Enkonduko kaj difino

Ni uzu kiel enkondukon al la temo de strategiaj ludoj simplan ekzemplon por klarigo kio estas venkostrategio. Poste en du similaj ludoj ni provas, ĉu la sama venkostrategio funkcias.

1.1 Ludo 1 *Kuro ĝis 33*

Ludas du personoj: A kaj B, kiuj elektas unu post la alia, unu nombron el inter la nombroj $1, 2, 3, 4, 5$. La nombro povas esti elektata plurfoje. Ĉiun tian elekton ni nomos paŝo. Ni decidu, ke ĉiam komencas ludon la persono A.

Kiam la ludo finiĝas? Gajnas tiu ludanto, kiu kiel la unua elektos tiun nombron (kiel dirite – el inter la nombroj $1, 2, 3, 4, 5$), kiu adiciita al la nombroj antaŭe elektitaj de ambaŭ ludantoj egalos al 33 aŭ superos 33.

Kiam la unua paŝo de A estus 2, la unua paŝo de B – 3, la sekva paŝo de A – 2, la sekva paŝo de B – 5, la sekvaj ses paŝoj de la ludantoj – 1, tiun elektadon priskribus la vico $(2, 3, 2, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ kaj la ludo devus daŭri, ĉar ĝis tiu momento la sumo de la elektitaj nombroj egalas nur al 18.

Pure teoria rezonado aŭ kelkaj provoj de la ludado obeanta la priskribitajn regulojn gvidas al la konkludo, ke la ludanto, kiu komencas la ludon povas fari tiun unuan paŝon, kiu garantios al li la venkon. Por pruvi tiun aserton, ni rezonu jene: la ludanto A povos fari la decidan – lastan – venkan paŝon, kiam la sumo, kiun ricevos la ludanto B post sia antaŭa paŝo egalos al 28 aŭ superos 28. Sufiĉos, ke tiam A elektos la nombron 5, ĉar la ricevota sumo egalos al 33 aŭ ĝin superos. Por ke tiu situacio ekestu, en sia antaŭlasta paŝo la ludanto A devas atingi la nombron 27, do en la antaŭa paŝo – la nombron 21, en la antaŭa – la nombron 15, en la antaŭa – 9, do lia unua paŝo devas esti la elekto de la nombro 3.

[*]jangorowski@interia.pl
[†]alomnicki@poczta.fm
[‡]jerzy.zabowski@wlodkowic.pl

La ludon, kies rezulto ne dependas de la blinda sorto, sed de la strategio, kiun trovis kaj sekvas unu el la ludantoj, ni nomu startegia. La ludo 1 estas do la ekzemplo de la strategia ludo, ĉar ekzistas la strategio de la ludanto, kiu komencas la ludon, gvidanta al la venko.

1.2 Ludo 2: Kuro ĝis 62

Ni ŝanĝu en la reguloj de la ludo 1 la nombron 33 per la nombro 62 kaj ankaŭ tion, ke la ludantoj A kaj B elektas la nombrojn el inter la nombroj $1, 2, 3$. Rezonado per analogio (al la prezentita supre) gvidas al la konkludo, ke ekzistas la strategio de la ludanto, kiu komencas la ludon, gvidanta al la venko. La unua – venka paŝo estas la elekto de la nombro 2.

1.3 Ludo 3: Kuro ĝis 55

Ni ŝanĝu en la reguloj de la ludo 1 la nombron 33 per la nombro 55 kaj ankaŭ tion, ke la ludantoj A kaj B elektas la nombrojn el inter la nombroj $1, 2, 3, 4$. Ne malfacile estas pruvi, ke ne ekzistas la strategio de la ludanto, komencanta la ludon, kiu garantias al li la venkon.

2 Ĝeneraligo

Ĝis nun ni rigardis tri konkretajn ludojn de nia kurado kaj por du trovis venkostrategion por la ludanto komencanta la ludon, sed por unu ne. Por matematikistoj stariĝas la demando, kiel ĝenerale pruvi kiuj tiaj ludoj havas tian venkostrategion kaj kiuj ne.

2.1 Kuro ĝis la nombro L

Ni ŝanĝu en la reguloj de la ludo 1 la nombron 33 per la nombro L, pli granda ol ĉiu nombro apartenada al la aro $X = \{1,2,\ldots,t\}$, kie $t \geq 2$. La ludantoj A kaj B elektas la nombrojn el la aro X same, kiel en la ludo 1.

La antaŭaj ekzemploj (ludoj 1, 2, 3) pravigas la konjekton, ke ekzisto de la venkostrategio de la ludanto, komencanta la ludon, dependas de la rilato inter la nombroj L kaj t. La intuicio akirita dum la studado de la ludoj 1, 2, 3 sufloras jenan teoremon:

Teoremo 1. *Ni premisu, ke $X = \{1,2,\ldots,t\}$, kie $t \geq 2$, $L \in \mathbb{N}$*

1. *Se L ne estas dividebla per $t+1$, ekzistas la venkostrategio por la ludanto, kiu komencas la ludon.*

2. *Se L estas dividebla per $t+1$, ekzistas la venkostrategio por la ludanto, kiu* ne *komencas la ludon.*

La pruvo ne estas malfacila por matematikistoj, sed sufiĉe malfacila kaj interesa ekzemple por mezlernejanoj. Anstataŭ tuj ĝin prezenti ni priskribos la regulojn de la ludo kaj teoremo pli ĝenerala. Post la pruvo de tiu pli ĝenerala teoremo 2 ni rajtos diri, ke la teoremo 1 estas la korolario de la teoremo 2.

2.2 Kuro ĝis la nombro L matematike vortumita

Ni decidu, ke X estas subaro de la aro $\mathbb{N}$ (de naturaj entjeroj) tia, ke $X \geq 2$ (al X apartenas du aŭ pli altaj nombroj). Ni fiksu la entjeron L tiel, ke Ludas du personoj: A (kiu komencas) kaj B, kiuj elektas unu post la alia unu nombron el la aro X. La nombro povas esti elektata plurfoje. La simbolo $x_1,x_2,\ldots$ signifu la vicon de la unu post la alia elektataj nombroj, $x_1,x_3,x_5,\ldots$ estu la nombroj elektataj de A. La nombroj $x_2,x_4,x_5,\ldots$ elektataj de B.

La ludo finiĝas per la venko de tiu ludanto, kiu elektis la nombron $x_n \in X$ tian, ke

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq L.$$

Alivorte, venkas tiu ludanto, kiu kiel la unua elektos tiun nombron el la aro X, kiu adiciita al la nombroj antaŭe elektitaj de ambaŭ ludantoj egalos al L aŭ superos L.

Teoremo 2. *Ni premisu, ke* $a \in \mathbb{N}_+$, $k \in \mathbb{N}_+$, $X = \{a,a+1,\ldots,a+k\}$, $L \in \mathbb{N}$ *kaj* $L \geq 2a+k$.

1. *Se la resto ĉe eŭklida divido de L per* $2a+k$ *apartenas al* $\{1,2,3,\ldots,a+k\}$, *ekzistas la venkostrategio de la ludanto, kiu komencas la ludon* ***kuro ĝis L****.*
2. *Se la resto ĉe eŭklida divido de L per* $2a+k$ *apartenas al* $\{0,a+k+1,\cdots,2a+k-1\}$, *ekzistas la venkostrategio de la ludanto, kiu* ne *komencas la ludon* ***kuro ĝis L****.*

Pruvo. La litero r signifu la reston ĉe eŭklida divido de L per $2a+k$, $L = t(2a+k)+r$, kie $t \in \mathbb{N}$, $r \in \{0,1,2,\ldots,2a+k-1\}$.

1. Unue ni premisu ke $r \in \{a,a+1,a+2,\ldots,a+k\} = X$. La venkostrategio por la ludanto A, kiu komencas la ludon, estas jena:
   - la unua paŝo: elekto de la nombro r,
   - la dua paŝo kaj la sekvaj: elekto de la nombro $2a+k-b$, kie b estas la nombro elektita de la ludanto B en la paŝo antaŭa.

   La kondiĉo $L = t(2a+k)+r$ implicas, ke la ludanto A atingos L en la paŝo havanta la numeron $t+1$.

   Nun ni premisu, ke $r \in \{1,2,\ldots,a-1\}$. En ĉi tiu kazo la venkostrategio de A (komencanta la ludon) estas jena:
   - la unua paŝo: elekto de la nombro a,
   - la dua paŝo kaj la sekvaj: elekto de la nombro $2a+k-b$, kie b estas la nombro elektita de la ludanto B en la paŝo antaŭa.

   Post t paŝoj de A la sumo de la nombroj elektitaj de ambaŭ ludantoj estos egala al $a+(2a+k)(t-1)$. Evidente

   $$a+(2a+k)(t-1) = (2a+k)t+r-(a+k) = r = L-(a+k)-r.$$

   Nun B devas elekti unu nombron el $X = \{a,a+1,\ldots,a+k\}$, do poste A povas fari la venkopaŝon.

2. Ni premisu nun, ke $r = 0$. Tiam $L = t(2a + k)$ por iu entjero t pli granda ol 0. La ludanto A komencas la ludon. Venki povas B, sekvante jenan strategion: se A elektis la nombron c, B devas elekti la nombron $2a + k - c$ (povas esti, ke plurfoje).

   Fine nu premisu, ke $r \in \{a + k + 1, a + k + 2, \ldots, 2a + k - 1\}$. Ekzistas la venko-strategio por B, kiu ne komencis la ludon. Se A elektis la nombron c, B devas elekti la nombron $2a + k - c$.

$\square$

3 Konkludo

Eĉ se la matematika pruvo por la ekzisto de venkostrategioj en la ludo "kuro ĝis L" ne antaŭenigas la matematikon mem, ĝi povas antaŭenigi la matematikan komprenon de mezlernejano. Eĉ pli se en moderna lernejo kun interfaka lernado oni en la fako de komputiko igas la lernantojn verki programojn, kiuj eluzas la strategion. Certe la posta ludo kontraŭ la komputilo estas enuiga, ĉar la komputilo ĉiam venkas, krom sed $r = 0$.