Bibliografio

1. — Z. Kopal — 1959 — »Close binary systems«. Champan & Hall, London, and Wiley, New York.

2. — Z. Kopal — 1966 — »Internal structure of the stars and apsidal motion«. »Advances in astronomy and astrophysics«. 3,89.

3. — I. Semeniuk — 1967 — »CO Lacertae, an eclipsing variable with apsidal motion«. A.A. **17**,223.

4. — I. Semeniuk — 1968 — »Photoelectric observations of six eclipsing variables with apsidal motion«. A.A. **18**,1.

5. — J. S. Mathis — 1967 — »The apsidal constants of stellar models«. Ap. J. **149**,619.

6. — I. Semeniuk kaj B. Baczynski — 1968 — »Apsidal motion in the binary systems III. Model computations«. A.A. **18**,33.

7. — A. Blaauw — 1952 — »The age andevolution of the ζ Persei gruop of O- and B-stars«. B.A.N. **11**,405.

EL SCIENCA REVUO de Internacia Scienca Asocio Esperantista,
Vol. 20 (1969.), n-ro 3/4

517.92:517.512

PRI SOLVO DE UNUMEZURA MULTEPARAMETRA EKSTREMA PROBLEMO LAŬ METODO DE LA POTENCAJ SERIOJ

(Filĉakov P. F.[1]) Sekennyk A. A., Matvijiŝyn Ja. O.; Kiev, USSR.)

La scienco pri defirencialaj ekvacioj laŭ sia esenco restas ĉiam juna kaj ĉiam evoluata, ĉar en ĉiuj novaperintaj branĉoj de ecplorado (biologio, kibernetiko, sociologio, astrofiziko k.a.) ĝi tuj trovas por si novajn sferojn de uzado kaj ĉerpas ĉe ili freŝajn kaj originalajn ideojn por siaj novaj problemoj

La solvo de liniaj ekvacioj pli altaj ol unua ordo kun variaj koeficientoj ne povas esti prezentitaj en la ĝenerala kazo kun helpo de la elementaj funkcioj. Des pli, se oni parolas pri neliniaj ekvacioj.

Vaste uzata estas la metodo de la potencaj serioj, sed uzante ĉi-metodon ni renkontiĝas kun malfacilaĵoj ĉe diferenciado de funkcioj aŭ, se diri pli simple, kun kalkulaj malfacilecoj. Kvankam kalkula tekniko tre progresis dum la lastaj jardekoj, oni ne ĉiam povas eluzi ĝiajn komplezojn.

Por eviti similajn kalkulajn komplikaĵojn estas proponita nova metodo (I), apoganta sin sur la malnovan ideon de Leonhard Euler (8). Solvon de diferenciala ekvacio oni prezentigas per la potenca serio kun nekonataj koeficientoj, kies trovado faciliĝas dank'al speciala rekurenta formulo. Ĉi formulo permesas trovi simplan skemon kaj por vastaj klasoj de la ekvacioj la solvon de Koŝi-problemo povas esti kalkulita ĝis la fino eĉ kun helpo de simpla mana aritmometro. La metodo facile estas transportebla en kompleksan sferon, oni rekte esprimas radiuson de la konverĝo (laŭ tabeloj) kaj analitikan daŭrigon) kaj eĉ strangajn punktojn.

La potencaj serioj por integrado de unu diferenciala ekvacio unue estis aplikitaj de Isaas Newton (1676). Aro da verkaĵoj de Gottfried W. Leibniz, Ja. Bernulli kaj J. Bernulli enhavas sisteman priskribon de la metodo de nedifinitaj koeficientoj por solvo de linearaj kaj kelkaj aliaj diferencialaj ekvacioj.

Sekvan gravan paŝon entreprenis en tiu direkto Leonhard Euler. Li proponis solvon de la ekvacio

$$y' = f(x,y),$$

kiu plenumas kondiĉon $y(0) = 0$ serĉi en la formo de potenca serio

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

[1]) korespondа membro de la Ukrainia Scienca Akademio

kies koeficientoj troviĝas laŭ formulo de Taylor

$$a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}\ ;\ a_1 = y'(0) = f(x,y)\ \Big|\begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0. \end{array}$$

Ĉiuj necesaj diferencialoj en ĉi-tiu kazo estas troveblaj per konsekvenca diferenciado de la origina ekvacio. Ĉi-tiu metodo aplikita estis ĝuste 200 jarojn antaŭe (8).

Dum sekvantaj jarcentoj la metodo de L. Euler estis vaste uzita ĉe solvado de diversspecaj teoretikaj demandoj, sed ĝia praktika apliko, kiel ni supre jam indikis, estas malfaciligita pro la kaŭzo, ke diferenciado de la funkcio f(x,y) kun pligrandiĝo n tre rapide malsimpliĝas kaj kutime per tiu vojo estas malfacile trovi pli ol 5—10 membroj de la serio.

La metodo, proponita en (1—4), malaperigas ĉiujn similajn komplikaĵojn. Ĉefa ideo de ĉi-metodo estis entenata en alia maniero de la serĉado de koeficientoj, kiujn nun oni trovas ne laŭ formulo de Taylor, sed kun helpo de Koŝi-formulo por multiplikado de la potencaj serioj. Formulo de Koŝi permesas konstrui por la vasta klaso de diferencialaj ekvacioj algoritmojn de la rekurenta aspekto, kiuj estas facile programitaj kun helpo de elektronaj maŝinoj t.e. solvitaj. Postan evoluon ĉi ideo ricevis[1]) en (5;6).

En ĉi-tie prezentita artikolo estas solvata unumezura multeparametra problemo. Ni parolas pri ekvacio, kiu havas aspekton:

$$y^{\upsilon}(x) + \sum_{i=i}^{\upsilon} P_i(x, \alpha_1, \alpha_2, ..)\ y^{(\upsilon-i)}(x) = P(x, \alpha_1, \alpha_2, ...) \qquad (1)$$

kun ekstremaj kondiĉoj

$$\sum_{k=0}^{\upsilon-1} \alpha_{ik}\ y^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{ik}\ y^{(k)}(1) = \gamma_i \qquad \begin{array}{l} i = 1,..,m, \\ m \geqslant \upsilon \end{array} \qquad (2)$$

La koeficientoj Pi kaj P estas supozataj kiel unusignifaj kaj kontinuaj rilate x kaj rilate al ĉiuj siaj parametroj $\alpha_1, \alpha_2 \dots$, ĝis kiam la punkto x, α_1, α_2 restas en iu domajno G de la spaco (x, α_1, α_2). La samo estas supozebla pri la koeficientoj de ekstremaj kondiĉoj α_{ik}, β_{ik}, γ_i rilate $\alpha_1, \alpha_2 \dots$

Necesas determini aron de tiuj valoroj de la parametroj α_1, α_2, kun kiuj ekvacio (1) havas nemalaperintan idente solvon $y(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ plenumanta al ekstremaj kondiĉoj (2). Sekve antaŭ ni estas problemo pri proprumaj valoroj,

---

[1]) Dum internacia scienca studenta seminario — STELO en Torun (Pollando) estis prezentita esperantlingva prelego (premiigita):

Ja. O. Matvijiŝyn. »Pri unu Euler-metodo de la solvo de Koŝi-problemo por neliniaj diferencialaj ekvacioj«.

starigita de Ŝ. E. Mikeladze en (7) En tiu kazo, kiam koeficientoj Pi kaj P tute ne havas strangajn punktojn sur fineca distanco, la serĉata integralo de la ekvacio (1) estos kiel integra (entjera) funkcio de x; t. e.

$$P_1(x, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{1n}(\alpha_1, \alpha_2, ...)\ x^n \qquad (3)$$

$$P(x, \alpha_1\ \alpha_2) = \sum_{n=0}^{n} P_n(\alpha_1, \alpha_2, ...)\ x^n$$

Por konstruado de serĉata solvo ni utiligu la potencan serion

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n \qquad (4)$$

kie an — dume nekonataj koeficientoj. Por oportuneco ni prezentu la derivaton de y per sekvantaj potencaj serioj:

$$y^{\{k\}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+k}\ x^n \qquad (5)$$

kie estas markite

$$b_{n+k} = (n+1)\ (n+2)\ \dots\ (n+k)\ a_{n+k} \qquad (6)$$

Anstataŭigante la seriojn (3), (4), (5) en diferenciala ekvacio (1) kaj komparante la koeficientojn ĉe la samaj potencoj de x, ni ricevos la rekurentan formulon por determinado de koeficentoj an

$$a_{n+\upsilon} = \frac{P_n - \sum_{j=1}^{\upsilon} \left[P_{jn}\ a^{\{\upsilon-j\}}_{n+\upsilon-j} \right]}{(n+1)\ (n+2)\ \dots\ (n+\upsilon)} \qquad (7)$$

kie en krampoj troviĝas la konata produto de Koŝi. Kun helpo de la rilato (7) ĉiuj koeficientoj, komencante de υ el la serio (4), povas esti esprimitaj pere de $a_0, a_1, \dots, a_{\upsilon-1}$ kaj parametroj $\alpha_1, \alpha_2, \dots$.

Tial

$$y = \sum_{n=0}^{\upsilon-1} a_n X^n + \sum_{n=\upsilon}^{\infty} \varphi_n (a_0, a_1, \ldots, a_{\upsilon-1}, \alpha_1, \ldots)\, X^n \qquad (8)$$

Aparte, se ĉiuj Pi kaj P estas algebraj funkcioj, tiam ankaŭ ĉiuj φi estos algebraj funkcioj. Des pli ili idente koincidas kaj ni povas rekurentan formulon esprimi rekte pere de terminoj de la koeficientoj, ripetante la ekvacion (1).

Uzante esprimon (8) kaj ekstremajn kondiĉojn (2), ni ricevas la sistemon de ekvacioj por difinado de la parametroj α_1, α_2, Difininte de ĉi-tie aron de parametroj $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_1{}^1, \alpha_2{}^1, \alpha_3{}^1, \ldots$ ni scipovos konstrui la sistemon de fundamentaj ekvacioj $y_1(x)$, $y_2(x) \ldots$, entenantaj linie la parametrojn a_0. a $a_1 \ldots . a_{\upsilon-1}$.

En la okazo se ekzistas limo lim $a_n / a_{n+\rho}$ la konverĝa radiuso de la potencaj serioj (3) povas esti determinita nombre, same, kalkulante sufiĉan kvanton da membroj de la konsekvencaĵo

$$R_n^p = \frac{a_n}{a_{n+p}} \quad , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, p = 1, 2, 3, \ldots$$

ĝis tiu valoro N, komencante per kiu ekrealiĝos la egaleco kun necesa precizeco por donita problemo

$$R_n^p = \text{const} = R^p, \; n \geqslant N.$$

Necesas rimarki, ke la metodo estas aplikata ankaŭ tiam, kiam P_1. P_2.. P_υ kaj P havas finitan nombron de malkontinuoj de la unua ordo en intervalo $0 \leqslant X \leqslant 1$ entenanta sin en G. Se eĉ unu el koeficientoj de la ekvacio (1) en punkto x = 0 senfiniĝas (tiel nomitaj ekvacioj de Fukso-klaso), tiam la ekvacioj de ĉi-tiu aspekto estas esploritaj kun helpo de ĝeneraligitaj potencaj serioj kun nedifinitaj eksponentoj de la potenco kaj koeficientoj.

Ĉitita literaturo:

1. Filiĉakov P. F. Pro odyn efektyvnyj metod rozvjazannja zadaĉi Koŝi dla nelinijnyĥ dyferencialnyĥ rivnjan (Pri unu efektiva metodo por rezolvo de Koŝi-problemo por neliniaj diferencialaj ekvacioj). »Dopovidi Akademiji nauk URSR« (Prelegoj de la Akademio de sciencoj USSR, mallonge »DAN«), ser. A, N⁰ 1, 1967.

2. Filĉakov P. F. Pro odyn efektyvnyj metod rozvjazuvanja krajovyĥ zadaĉ dla nelinijnyĥ dyferencialnyĥ rivnjan za dopomohoju stepenevyĥ rjadiv (Pri unu efektiva metodo por rezolvo de ekstremaj problemoj por neliniaj diferencialaj ekvacioj kun helpo de potencaj serioj), »DAN«, ser. A. No 2, 1967.

3. Filĉakov P. F. Pro odyn efektyvnyj metod vyznaĉennja vlasnyĥ znaĉen dla zvyĉajnyĥ dyferencialnyĥ rivnjan, »DAN«, ser. A, No 10, 1967.

4. Filĉakov P. F. Rozvjazannja nelinijnyĥ i linijnyĥ zvyĉajnyĥ dyferencialnyĥ rivnjan i jiĥ system pry dopomozi stepenevyĥ rjadiv, »Ukrajinskyj matematyĉnyj ĵurnal«, t. 21, No 2, 1969.

5. Sukennyk A. A. Zastosuvannja metodu stepenevyĥ rjadiv do rovjazuvannja zadaĉi pro pozdovĵnij zhyn sterĵnja postijnoji ĵorkstkosti, »Ĉetverta naukova konferencija molodyĥ matematykiv Ukrajiny«, Kyjiv, 1969.

6. Sekennyk A. A. Zastosuvannja metodu stepenevyĥ rjadiv do rozvjazuvanja krajovoji zadaĉi dla systemy dyferencialnyĥ rivnjan z parametramy, »DAN«, ser. A, No 9, 1968.

7. Mikeladze Ŝ. E. Novye metody integrirovanija differencialnyĥ uravnenij, Moskva—Leningrad, 1951.

8. Euler L. Institutionis Calculi Integralis, Petropoli, 1769.