SCIENCA REVUO de Internacia Scienca Asocio Esperantista BEOGRAD, Jugoslavio

El Vol. 22 n-ro 5-6/91-92 25.12.1971.

ĜENERALA SOLVO POR LA EKVACIO DE PERTURBOJ EN REKTANGULAJ KOORDINATOJ

(Bož. Popović, Beograd, Jugoslavio)*

Pri perturboj en la rektangulaj koordinatoj estas jam faritaj multaj verkaĵoj. D. Brouwer (1944) donis eblecojn esprimi ilin per derivoj de la neperturbitaj koordinatoj laŭ la integraj konstantoj. La saman vojon sekvis Babadĵanjanc (1969a, 1969b), utiliginte por la solvado de la perturbaj ekvacioj la (modifitajn) metodojn ne nur de Brouwer, sed ankaŭ de Hill kaj de Encke, pritraktinte la problemon iom pli profunde kaj pli larĝe. Alian vojon sekvis B. Popović (1961a, 1961b), uzinte la vektoran formon kaj integrinte la ekvacion rekte, trovinte la solvon en eksplica formo (en kvadraturoj). La manko de la solvo: la integraloj estis kelkloke nepropraj kaj oni ne povis pruvi la bezonatan konverĝon. P. Musen (1963, 1964, 1965) uzis iom similan vojon, sed ne faris sufiĉe rektan kaj sufiĉe eksplican solvon.

Ne necesas mencii multajn aliajn verkaĵojn, solvantajn la problemon parte aŭ modife. La celo de ĉi tiu verkaĵo estas doni la solvon kiu estas ne nur eksplica (en plene aŭtomate kalkuleblaj kvadraturoj), sed ankaŭ ĝenerala - senkonsidere la naturon de la perturba forto kaj formon de la neperturbata orbito.

*) Ognjena Price 80, 11000 BEOGRAD.

1. Perturboj de la unua ordo

La ekvacio de la perturbata moviĝo estas

$$(1,1)\qquad \frac{d^2\vec{r}^*}{dt^2} = -\mu\,|\vec{r}^*|^{-3}\,\vec{r}^* + \delta\cdot\vec{F}\ ,$$

kie δ estas eta faktoro kaj $\delta\vec{F}$ estas la perturboforto (de ia ajn deveno). Se oni utiligas la solvon $\vec{r}$ de la neperturba ekvacio

$$(1,2)\qquad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu r^{-3}\vec{r}$$

oni povas al la ekvacio por la perturboj

$$(1,3)\qquad \vec{r}^* - \vec{r} = \delta\vec{x}$$

doni la formon (v. Popoviĉ 1961a):

$$d^2(\delta\vec{x})/(dt^2) = -\mu\vec{r}\,(|\vec{r}+\delta\vec{x}|^{-3} - r^{-3}) - \mu\delta\vec{x}\,|\vec{r}+\delta\vec{x}|^{-3} + \delta F$$

$$(1,4)\qquad d^2\vec{x}\,/\,(dt^2) + \mu r^{-3}\vec{x} = 3\mu r^{-5}(\vec{r}\cdot\vec{x})\,\vec{r} + \vec{F} + o(\delta)$$

Sen konataj perturboj, oni ne povas trovi $\vec{F}$ pli proksime ol esprimata per la neperturbitaj kvantoj. do

$$(1,5)\qquad \vec{F} = \vec{f} + \delta\cdot O(1)$$

Pro la sama kaŭzo oni devas forĵeti ankaŭ la aliajn membrojn - signitaj en (1,4) kune per $o(\delta)$ - pro kio $\vec{x}$ povas enhavi la perturbojn de nur unua ordo, troveblajn el la ekvacio

$$(1,6)\qquad d^2\vec{x}\,/\,(dt^2) + \mu r^{-3}\,\vec{x} - 3\mu r^{-5}\,(\vec{r}\cdot\vec{x})\,\vec{r} = \vec{f}.$$

Unu integralo de ĉi tiu ekvacio estas ĉiam facile trovebla, multiplikinte ĝin vektore per $\vec{r}$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\frac{d\vec{x}}{dt}) - \frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{x}}{dt} + \mu r^{-3}\,\vec{r}\times\vec{x} = \vec{r}\times\vec{f}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\frac{d\vec{x}}{dt}) - \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{x} = \vec{r}\times\vec{f}$$

kaj de tie venas la unua integralo

$$(1,7)\qquad \vec{r}\times\frac{d\vec{x}}{dt} - \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{x} = \vec{G}\ ,\quad \vec{G} = \int_{t_0}^{t}(\vec{r}\times\vec{f})\,dt$$

La problemom pri la ekiraj donitaĵoj, uzotaj en ĉi tiu problemo, oni povas solvi jene. Kiam oni trovis la neperturbatan solvon, tiam oni povas (kaj devas) akordigi ĝin kun la ekiraj donoj, preninte

(1,8) $\vec{r}\,(t_o) = \vec{r}_o,\quad \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t = t_o} = \vec{v}_o$

- aliel oni ja ne povas preni kiam oni ne konas la perturbojn! El tio, por la perturboj, sekvas la ekiraj donoj

(1,8a) $\vec{x}\,(t_o) = 0,\quad (d\vec{x}/dt)_o = 0.$

Por ekspluati la unuan integralon (1,7) kaj trovi pluan solvon, mi denove uzos la diskomponadon el Popoviĉ (1961a):

(1,9) $$\vec{x} = \xi\vec{r} + \eta\,(\vec{c}\times\vec{r}) + \zeta\vec{c},\quad \vec{c} = \vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

Tiam (1,7) donas tuj

$$\vec{x}\cdot\vec{c} = -\,\vec{r}\cdot\vec{G},\quad \frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\vec{c} = -\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{G}$$

aŭ

(1,10) $$\zeta = -c^{-2}\,\vec{r}\cdot\vec{G},\quad \zeta' = -c^{-2}\,\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{G}$$

La multipliko de (1,7) skalare per $\vec{c}$ donas

$$\xi c^2 + \eta' c^2 r^2 + \eta c^2\left(\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right) + \xi c^2 - \eta c^2\left(\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{c}\cdot\vec{G}$$

(1,11) $$2\xi + r^2\,\eta' = c^{-2}\,\vec{c}\cdot\vec{G}$$

Post ĉi tio, restas por trovi nur ξ, ĉar tiam la lasta ekvacio donas η senpere (kaj ζ ni jam havas!)

Revenu al la ekvacio (1,6). Ĝia skalara multipliko per $\vec{r}$ prisimpligas ĝin jene

$$\xi'' r^2 + 2\xi'\left(\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right) - \xi\mu r^{-3}\, r^2 - 2\eta' c^2 + \mu r^{-3}\,\xi r^2 - 3\mu r^{-1}\xi = \vec{r}\cdot\vec{f}$$

Kaj sen η', anstataŭebla el (1,11) ĝi fariĝas

$$r^4\xi'' + r^2\cdot\frac{dr^2}{dt}\,\xi' - 3\mu r\,\xi + 4c^2\,\xi = r^2\beta$$

aŭ

(1,12) $$r^2(r^2\,\xi')' + (4c^2 - 3r)\,\xi = r^2\beta$$

(1,12a) $$\beta = \vec{r}\cdot\vec{f} + 2r^{-2}F_c,\quad F_c = \int_{t_o}^{t} (\vec{c}\vec{r}\vec{f})\,dt\,.$$

Solvi ĉi tiun ekvacion oni povas ŝajne plej facile per la enkonduko de r kiel la sendependa variablo, trans

$$(1,13)\qquad (\mathbf{r}.\frac{dr}{dt})^2 = r^2(\frac{d\vec{r}}{dt})^2 - c^2 = 2\mu r + r^2 h - c^2, \quad h = (\frac{d\vec{r}}{dt})^2 - 2\mu/r.$$

La trovita ekvacio

$$r^2(hr^2+2\mu r-c^2)\frac{d^2\xi}{dr^2} + r(2hr^2 + 3\mu r - c^2)\frac{d\xi}{dr} + (4c^2-3\mu r)\xi = r^2\beta$$

indikas al la integriga faktoro de la formo r^k. Montriĝas ke $k = -3$, de kie

$$d\left[\frac{hr^2+2\mu r - c^2}{r}\cdot\frac{d\xi}{dr} + \frac{hr^2+ 3\mu r - 2c^2}{r^2}\xi\right] = r^{-1}\beta\cdot dr$$

kaj tuj

$$\xi = r^{-2}\sqrt{hr^2+2\mu r-c^2}\cdot\int_{r_o}^{r} r^3(hr^2+2\mu r - c^2)^{-3/2}\left(\int r^{-1}\beta dr\right) dr$$

Fakte la sama integriga faktoro estas trovita en Popoviĉ (1961a), ĉar se (por la sendependa variablo) oni transiras al la ekscentra anomalio u, anstataŭ r, la integriga faktoro r^{-3} fariĝas $r^{-3}\frac{dr}{du}$, kiel estis trovita tie.

Sed la periodeco de r povus kaŭzi superfluajn malfacilaĵojn, pro kio estas pli bone lasi ke t restu la sendependa variablo - ĝis la enkonduko de nova, pli konvena, variablo. Anstataŭ solvi tiel la ekvacion (1,12), estis pli facile iri antaŭe al ankoraŭ unu integralo de (1,6). Nome skalara multipliko de (1,6) per $\vec{v} = d\vec{r}/(dt)$ donis

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\,\frac{d\vec{x}}{dt}) - \frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \mu\frac{\vec{v}.\vec{x}}{r^3} - 3\mu\frac{\vec{r}.\vec{x}}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}.\vec{v}}{r^3} = \vec{v}.\vec{f}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}) + \mu r^{-3}(\frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\vec{r} + \vec{v}.\vec{x}) + \mu(\vec{r}.\vec{x})\frac{d}{dt}(r^{-3}) = \vec{r}.\vec{f}$$

$$(1,14)\qquad \vec{v}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt} + \mu r^{-3}(\vec{r}.\vec{x}) = F_r, \quad F_r = \int_{t_o}^{t}\vec{f}\cdot d\vec{r}$$

La diskompono (1,9) donas al la trovita integralo la formon

$$\xi'(\vec{r}.\vec{v}) + \xi\vec{v}^2 + \eta' c^2 + \mu r^{-1}\xi = F_r,$$

kio kun η' el (1,11) fariĝas

$$\xi'(\vec{r}.\vec{v}) + (\vec{v}^2 + \mu/r - 2c^2 r^{-2})\xi = F_r - r^{-2}F_c$$

Al la koeficiento apud ξ oni povas doni la formon

$$-2r^{-2}\,[r^2\,\vec{v}^2 - (\vec{r}.\vec{v})^2] + \vec{v}^2 + \mu/r = -(\vec{r}.\vec{v})' - (\vec{r}.\vec{v})r^2\,(r^{-2})' =$$

$$= -r^2\,\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{r^2}\right)'$$

do

(1,15) $$\xi' \,.\, rr' - r^2\left(\frac{r'}{r}\right)'\,\xi = \gamma, \quad \gamma = F_r - r^{-2}\,F_c\,,$$

kie F_c kaj F_r estas donitaj en (1,12a) kaj (1,14).

Daŭriginte laŭ tiu vojo, mi sukcesis solvi plene la problemom (sen la nepropraj integraloj). Sed dum la realigo de la solvo mi devis enkonduki novan sendependan variablon $\underline{y}$ (kaj kun ĝi ligitan helpan variablon ξ), difinitan per

(1,16) $$dt = dy\cdot r\,\sqrt{r_o/\mu}\,, \quad \xi = \nu y, \quad \nu^2 = 2 - r_o \,.\, \vec{v}_o^2\,/\mu = r_o/a_o\,.$$

Ĝi estas, en iom alia formo, enkondukita de K. S t u m p f f (Stumpf, 1947, 1959) kaj jam utiligata en la orbitteorio (ekz. K u s t a a n h e i m o, 1960). En ĉi tie donita formo estis utiligita unuafoje ĉe Popoviĉ (1959) sub la nomo "dekomenca anomalio". Sed pli konvena estus la nomo "r e g u l i g a a n o m a l i o" (pri tiu ĝia utiligebleco v.ekz. K u s t a a n h e i m o, 1966). Estis bone enkonduki ĝin ankaŭ pro tio ke ĝi estas reala por ĉiuj orbitformoj de neperturbata moviĝo.

Ĉiam realajn esprimformojn oni atingas per la realaj funkcioj (v. Stumpff, 1959)

(1,17) $$c_o = \cos\xi\,, \qquad c_1 = (\sin\xi) : \xi\,,$$

$$c_2 = (1-\cos\xi) : \xi^2, \qquad c_3 = (\xi - \sin\xi) : \xi^3$$

ĝenerale

(1,17a) $$c_k(\xi) = \xi^{-k}\int_0^{\xi} t^{k-1}\,c_{k-1}\,(t)dt, \quad k \geq 1, \quad c_o\,(\xi) = \cos\xi.$$

Estos utilaj iliaj derivoj (v. Kustaanheimo, 1966, ĉap. 5):

(1,18) $$\frac{d}{dy}\,(y^k\,c_k) = y^{k-1}\,c_{k-1}$$

Per ĉi funkcioj elegante esprimiĝas (Popoviĉ, 1970, p. 240)

(1.19) $$r = r_o \,.\, L, \qquad L = 1 + \eta\,y\,c_1 + \zeta\,y^2\,c_2$$

(1.20) $$\eta = \vec{r}_o \,.\, \vec{v}_o : \sqrt{\mu r_o}\,, \qquad \zeta = 1-\nu^2 = r_o\vec{v}_o^2/\mu - 1$$

(Estas nenia danĝero je konfuziĝo pro la samaj literoj ξ, η, ζ, uzitaj kaj ĉi tie kaj por la koeficientoj de la diskomponado el (1,9)).

La unuan fojon ĉi tie, mi bezonis facile deriveblajn esprimojn

$$(1,21) \qquad \dot{r} \equiv \frac{dr}{dy} = r_o(\eta c_o + \zeta y c_1)\ , \quad \ddot{r} \equiv \frac{d^2 r}{dy^2} = r_o - \nu^2 r$$

En la posta laboro estos bezonataj ankoraŭ la rilatoj:

$$(1,17b) \qquad 1-c_o = \xi^2 c_1\ , \quad 1-c_1 = \xi^2 c_3$$

$$(1,19a) \qquad \vec{r} = f\vec{r}_o + g\vec{v}_o\ , \quad f = 1 - y^2 c_2, \quad ng = nt - y^3 c_3 =$$
$$= yc_1 + \eta y^2 c_2 \quad (n^2 = \mu r_o^{-3})$$

Kun ĉi tiu variablo, do kun la ŝanĝo (1,16), la ekvacio (1,15) devas esti

$$\frac{d\xi}{dy}\ \frac{1}{r}\ \frac{dr}{dy} - r\,\frac{d}{dy}\left(r^{-2}\,\frac{dr}{dy}\right)\ \xi = \frac{r_o}{\mu}\ \gamma$$

$$\frac{d}{dy}\left(\xi r^2/\dot{r}\right) = \gamma r^3 r_o/(\mu \dot{r}^2)$$

$$(1,22) \qquad \xi = \frac{r_o}{\mu}\ \frac{\dot{r}}{r^2} \int_o^y r^2\,\gamma\, dQ\ , \qquad dQ = (\dot{r})^{-2}\ r\cdot dy$$

Kun ĉi tiel trovita ξ, oni havos tuj η el (1,11), kompreneble kun la ŝanĝo (1,16). do

$$(1,23) \qquad \eta = \sqrt{r_o/\mu}\ \int_o^y (c^{-2}\ F_c - 2\xi)\ r^{-1}\, dy$$

2. Plisimpligoj de la esprimoj por unuaj perturboj

Por ke ĉi tiu solvo fariĝu definitive uzebla, oni devas ankoraŭ esprimi Q kaj la nekonatojn iom pli detale.

Utiliginte la duan derivon (1,21) kaj la signaĵojn (1,20), ni havos el (1,22):

$$\nu^2\cdot dQ = \nu^2 r(\dot{r})^{-2}\,dy = r_o\,\dot{r}^{-2}\,dy - \dot{r}^{-2}\,\ddot{r}dy =$$
$$= -(r_o\zeta)^{-1}\ \ d(\eta + \frac{\zeta}{\nu}\ tg\,\xi\,)^{-1} + \ d(1/\dot{r})$$

La antaŭlasta diferencialo venis pro la valoro de $\dot{r}$ el (1,21) kaj pro la signifoj (1,17) de c_o, c_1, kun $\xi = \nu y$. Do

$$\nu^2 Q = \frac{1}{r_o \zeta}\left(\frac{1}{\eta} - \frac{\cos\xi}{\eta\cos\xi + \zeta y c_1}\right) + \frac{1}{r_o}\left(\frac{1}{\eta\cos\xi + \zeta y c_1} - \frac{1}{\eta}\right) =$$

$$= \frac{\eta c_o + \zeta y c_1 - \eta\cos\xi + \eta\zeta - \zeta\eta c_o - \zeta^2 y c_1}{r_o \eta\zeta\,(\eta c_o + \zeta y c_1)} = \frac{(1-\zeta) y c_1 + \eta(1-c_o)}{\eta\,\dot{r}}$$

fine

(2,1) $$Q = (y c_1 + \eta y^2 c_2) : (\eta \dot{r})$$

Post tio (1,22) donas

$$\xi\mu/r_o = r^{-2}\dot{r}\int_o^y \gamma[d(r^2 Q) - Q d(r^2)] = r^{-2}\dot{r}\,[r^2 Q\gamma - \int r^2 Q d\gamma - 2\int r\dot{r}Q\,\gamma dy] =$$

$$= \gamma\,\dot{r}\,Q - r^{-2}\dot{r}\int_o^y r\dot{r}Q\,(2\gamma + \beta)\,dy$$

ĉar pro (1,15) kaj (1,12a)

$$d\gamma = \vec{f}.\vec{v}\;dt + 2r^{-3}F_c\,dr - r^{-2}(\vec{c}\vec{r}\vec{f})\,dt = 2r^{-3}F_c\,dr +$$
$$+ r^{-2}(\vec{r}.\vec{v})(\vec{r}.\vec{f})\,dt$$

respektive

(2,2) $$d\gamma = \frac{dr}{r}\beta = \frac{\dot{r}}{r}\beta\,dy$$

Do

$$\xi\mu/r_o = \gamma(\dot{r}Q) - r^{-2}\dot{r}\int_o^y (r\dot{r}Q)\,\gamma^*\,dy, \quad \gamma^* = 2\gamma + \beta = \vec{r}.\vec{f} + 2F_r\,.$$

Por eviti duoblan integrigon, ĉe la dua parto de γ^* oni povas apliki la partan integrigon kun

(2,3) $$Q_1 = \int_o^y r\dot{r}Q\,dy = (r_o/\eta)\int_o^y (y c_1 + \eta y^2 c_2)(1 + \eta y c_1 + \zeta y^2 c_2)\,dy$$

kaj oni trovos

(2,4) $$\xi\mu/r_o = \gamma(\dot{r}Q) - r^{-2}\dot{r}\int_o^y (\dot{r}Q)\,r(\vec{r}.\vec{f})\,dy - 2r^{-2}\dot{r}\left[Q_1 F_r - \int_o^y Q_1\,(\vec{f}.d\vec{r})\right]$$

Konsiderante ke oni jam havas $\dot{r}Q$ el (2,1) kaj ke (2,3), post iom da kalkulo, donas

$$(2,3a)\quad Q_1 = \frac{r_o}{2\nu^2} y^3 [3c_3 + (2\nu^2-1) c_1 c_2] + \frac{r_o}{2\eta} y^2 c_2 [2+(\eta^2+\zeta)y^2 c_2],$$

ke oni povas fine koni γ el (1,15), t.e.

$$(2,5)\qquad \gamma = \int_{t_o}^{t} (\vec{f}.d\vec{r}) - r^{-2} \int_{t_o}^{t} (\vec{c}\vec{r}\vec{f})\, dt \;,$$

Ĉio estas je dispono por kalkuli ξ per simplaj kvadraturoj. Restas plisimpligi la esprimon (1,23) por η.

La partaj integrigoj kaj utiligo de la esprimo (1,22) donos

$$-2\,(\mu/r_o) \int (\xi/r)\, dy = \int_o^y \left[\int_o^y r^2 \gamma dQ\right] d\,(r^{-2}) = r^{-2} \int_o^y r^2\,\gamma\, dQ -$$

$$- \int_o^y \gamma dQ = r^{-2} r^2 \gamma Q - r^{-2} \int Q r\dot{r}\,(2\gamma + \beta)\, dy - \gamma Q + \int Q\,\frac{\dot{r}}{r}\,\beta\, dy =$$

$$= \int \beta r^{-2}\, dQ_1 - r^{-2} \int (2\gamma + \beta)\, dQ_1 .$$

Dispartigu la partojn de β el (1,12a) kaj de γ el (2,5); la lastaj integraloj fariĝos

$$\int r^{-2}\,(\vec{r}.\vec{f})\;\; dQ_1 - r^{-2}\int(\vec{r}.\vec{f})\, dQ_1 + 2\int r^{-4}\, F_c\, dQ_1 - 2r^{-2}\int F_r dQ_1 .$$

Kune kun la unua membro el (1,23) oni havos

$$(2,6)\qquad (\mu/r_o)^{3/2}\eta = \int_o^y c^{-2}\, F_c \left(\frac{\mu}{rr_o} + 2c^2\, r^{-4}\, r\dot{r}Q\right) dy + \int (\vec{r}.\vec{f})\, r^{-2}\; dQ_1 -$$
$$- r^{-2} \int (\vec{r}.\vec{f})\, dQ_1 - 2r^{-2} \left[Q_1 F_r - \int Q_1 (\vec{f}.d\vec{r}) \right] .$$

Escepte la unuan, ĉiuj aliaj integraloj estas simplaj. Por simpligi ankaŭ la unuan, metu

$$(2,7)\qquad dQ_2 = \left(\frac{\mu}{rr_o} + 2c^2\, \frac{r\dot{Q}}{r^3}\right) dy$$

La duan parton de la lasta esprimo, oni povas - pro Q el (2,1) - skribi en la formo

$$\frac{2c^2}{\eta} \cdot \frac{yc_1 + \eta y^2 c_2}{r^3}\, dy = \frac{2c^2 ng}{\eta r^3}\, dy = - \frac{2c^2}{\eta\,\mu}\, ng''\, dy = \frac{2c^2 n}{\eta\,\mu} \frac{dy}{dt} d(1-g')$$

ĉar (v.ekz. Popović 1970) per la Lagrange-koeficiento g, (1,19a) kaj aliaj ecoj (1,16) - (1,20) donas

(2,8) $$ng' = (c_o+\eta y c_1)\frac{dy}{dt} = n - y^2 c_2 \cdot \frac{1}{r\sqrt{r_o/\mu}} = n(1-L^{-1} y^2 c_2)$$

Krom tio, la neperturba ekvacio (1,2) donas senpere

(2,9) $$g'' = -\mu r^{-3} g.$$

Pro ĉio tio, kun dy el (1,6), la difereciealo (2,7) estos

$$dQ_2 = \frac{\mu}{rr_o} dy + \frac{2c^2}{\eta r_o^2} \cdot \frac{1}{r} d\left(\frac{1}{L} y^2 c_2\right) =$$

$$= \frac{\mu}{rr_o} dy + \frac{2c^2}{\eta r_o}[d(r^{-2} y^2 c_2) - \frac{1}{r} y^2 c_2 d(\frac{1}{r})] =$$

$$= \frac{\mu}{rr_o} dy + \frac{c^2}{\eta r_o}[d(2r^{-2} y^2 c_2) - y^2 c_2 d(r^{-2})] =$$

$$= \frac{\mu}{rr_o} dy + \frac{c^2}{\eta r_o}[d(r^{-2} y^2 c_2) + r^{-2} d(y^2 c_2)]$$

La unua kaj la tria sumato faras kune

$$\frac{r^{-2}}{r_o\eta}(\mu \eta r + c^2 y c_1) dy = \frac{\mu}{\eta} r_o^{-2} [\eta + (\eta^2 + \frac{c^2}{\mu r_o}) y c_1 + \eta\zeta y^2 c_2] L^{-2} dy$$

Pro

(2,10) $$c^2 = r_o^2 \vec{v}_o^2 - (\vec{r}_o \cdot \vec{v}_o)^2 = r_o\mu(1+\zeta) - \mu r_o \cdot \eta^2 = \mu r_o(1+\zeta-\eta^2)$$

koeficiento apud yc_1 fariĝas $1-\zeta$ kaj plue sekvas

$$\frac{\mu}{\eta} r_o^{-2}\left[L^{-2}dL + \frac{yc_1+\eta(1-c_o) + \eta\zeta y^2 c_2}{L^2}\right] dy = \frac{\mu}{\eta}\left[d\left(\frac{-1}{rr_o}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{yc_1 + \eta y^2 c_2}{r^2} \cdot \frac{dt}{r\sqrt{r_o/\mu}}\right] = \frac{-\mu}{\eta r_o} d\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{\eta} d(\mu r_o^{-2} g'),$$

do finfine

$$dQ_2 = \frac{c^2}{\eta r_o} d(r^{-2} y^2 c_2) - \frac{\mu}{\eta r_o} d\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2 c_2}{r}\right)$$

El tio sekvas la integralo

(2,11) $$Q_2 = \frac{c^2}{\eta r_o} r^{-2} y^2 c_2 - \frac{\mu}{\eta r_o}\left(\frac{1-y^2 c_2}{r} - \frac{1}{r_o}\right)$$

Kun ĉi tiu esprimo por Q_2 oni facile trovas la esprimon por la koordinato η el (2,6):

$$(2,12)\quad \left(\frac{\mu}{r_o}\right)^{3/2}\eta = c^{-2}F_cQ_2 - c^{-2}\int_{t_o}^{t} Q_2(\vec{c}\vec{r}\vec{f})\,dt + \int_o^y (\vec{r}.\vec{f})\frac{\dot{r}Q}{r}\,dy - r^{-2}\int_o^y(\vec{r}.\vec{f})\,r\mathring{r}Q\,dy - 2r^{-2}\left[Q_1F_r - \int_{t_o}^{t} Q_1(\vec{f}.d\vec{r})\right]$$

- Q, Q_1 jam esprimitaj kiel (2,1) kaj (2,3a).

3. Perturboj de superaj ordoj

Anstataŭ trakti sinsekve perturbojn de la dua, tria, ... ordoj, serĉu ĝenerale perturbojn de la ordo (k+1), supozante havi trovitajn perturbojn de la ordo (k). Nome supozu ke iu trovis solvon $\vec{r}^k$ de la ekvacio (1,1), kompreneble proksimuman, tian ke ĝi kontentigas ĝuste la ekvacion

$$(3,1)\quad \frac{d^2\vec{r}^k}{dt^2} + \mu\,|\vec{r}^k|^{-3}\,\vec{r}^k = \delta.\vec{F}_k$$

kun iu funkcio $\vec{F}_k$ enhavanta almenaŭ la tuton de la grado δ^{k-1} ĉe la funkcio $\vec{F}$, do

$$(3,2)\quad \vec{F} = \vec{F}_k + \delta^k\,.\,0(1)\,.$$

Kiun ekvacion devas kontentigi la diferenco $\vec{r}* - \vec{r}^k$? Tion montros la diferenco inter ambaŭ flankoj de la ekvacioj (1,1) kaj (3,1), nome

$$\frac{d^2(\vec{r}*-\vec{r}^k)}{dt^2} + \mu(\vec{r}* - \vec{r}^k)\,|\vec{r}^k|^{-3} + \mu\vec{r}*\left(|\vec{r}*|^{-3} - |\vec{r}^k|^{-3}\right) = \delta(\vec{F}-\vec{F}_k)$$

Jam el ĉi tiu formo oni vidas (ankaŭ korekta pruvo estas facile akirebla) ke

$$\vec{r}* - \vec{r}^k = \delta^{k+1}\,0\,(1)$$

Pro tio metu

$$(3,3)\quad \vec{r}* = \vec{r}^k + \delta^{k+1}\vec{x}\,,\quad \vec{F}-\vec{F}_k = \delta^k.\vec{f}$$

Tiam

$$(3,4)\qquad \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + \mu\vec{x}\,|\vec{r}^k|^{-3} + \mu(\vec{r}^k + \delta^{k+1}\,\vec{x})(|\vec{r}^k|^3 - |\vec{r}^*|^3)\cdot$$
$$\cdot(|\vec{r}^*|\cdot|\vec{r}^k|)^{-3}\,\delta^{-k-1} = \vec{f}.$$

Estante certaj pri la fina formo de la ekvacio (Brouwer 1944, Babaĝanjanc 1969 b, Popoviĉ 1961b), iru tuj al la formo (1,4):

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + \mu\vec{x}r^{-3} - 3\mu\,\frac{\vec{r}.\vec{x}}{r^2}\,.\,\frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{f} + \mu\vec{x}(r^{-3} - |\vec{r}^k|^{-3}) +$$
$$+ \frac{|\vec{r}^k|^6 - |\vec{r}^*|^6}{\delta^{k+1}|\vec{r}^*|^3\,|\vec{r}^k|^3(|\vec{r}^*|^3 + |\vec{r}^k|^3)} - 3\mu\,\frac{\vec{r}.\vec{x}}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r^3} + o(1)$$

La vektoron $\vec{f}$ oni povas kalkuli nur kiel $O(1)$, ĉar oni konas $\vec{F}$ nur kun perturboj de la ordo (k). Tial, laŭ (3,3), oni povos trovi nur

$$(3,5)\qquad \vec{f}_{k+1} = \vec{f}_{\delta=o}\,.$$

Sed tiam ne utilas plu konservi la membrojn $o(1)$. Kaj tiaj estas, unue, la membro (dekstraflanka) kun $\vec{x}$, ĉar evidente

$$(|\vec{r}^k|^3 - r^3) : (r^3|\vec{r}^k|^3) = o(1), \quad \text{por } k\geq 1.$$

Konsideru ankaŭ ke (3,3) donas

$$|\vec{r}^*|^2 = |\vec{r}^k|^2 + 2(\vec{r}^k.\vec{x})\,\delta^{k+1} + |\vec{x}|^2\,.\,\delta^{2k+2}$$

kaj do la membro kun $\vec{r}^k$ estas $O(1)$ (forfalas δ^{k+1} el la nominatoro kaj la denominatoro). Pro tio oni povas ĉiujn vektorojn tie anstataŭi per la neperturbata vektoro $\vec{r}$, sed tiam la esprimo kongruas kun la sekvanta, ĉar

$$\vec{r}\,.\,\frac{2(\vec{r}.\vec{x}).3r^4}{r^6.\,2r^3} - 3\,\frac{\vec{r}.\vec{x}}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r^3} = 0.$$

Per tio oni konstatas ke la tuta dekstra flanko de la ekvacio por $\vec{x}$ reduktiĝas al $\vec{f} + o(1)$ kaj por la solvado restas la formo

$$(3,6)\qquad \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + \mu r^{-3}\,\vec{x} - 3\mu\,\frac{\vec{r}.\vec{x}}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{f}_{k+1}$$

- ĝi do estas identa kun la ekvacio (1,6) por la perturboj de la unua ordo - nur la funkcion $\vec{f}$ anstataŭis la funkcio $\vec{f}_{k+1}$, trovebla kiel

$$(3,5a)\qquad \vec{f}_{k+1} = \left(\frac{\vec{F}-\vec{F}_k}{\delta^k}\right)_{\delta=0}.$$

En la normalaj cirkonstancoj oni preskaŭ neniam povos havi intermitan solvon (3,1) senpere kun $k > 1$. Oni havas regule solvon por perturboj de la unua ordo, post tio por la dua ordo ktp. Tio fakte signifas ke oni regule utiligas seriigon de la funkcio $\vec{F}$ el (1,1):

$$\vec{F} = (\vec{F})_1 + \delta(\vec{F})_2 + \delta^2(\vec{F})_3 + \ldots + \delta^{k-1}(\vec{F})_k + \delta^k(\vec{F})_{k+1} + \ldots$$

kaj ke kutime oni havos

$$(3,7) \qquad \vec{f}_{k+1} = \left(\frac{\delta^k(\vec{F})_{k+1}}{\delta^k}\right)_{\delta=0} = (\vec{F})_{k+1} = \left(\frac{d^k\vec{F}}{d\delta^k}\right)_{\delta=0}$$

Sed por esceptaj kazoj validas la ĝenerala esprimo (3,5) kun (3,3).

Do la funkcioj $\vec{f}_{k+1}$ estas sinsekve determineblaj, tuj post eltrovo de la perturboj de la ordo k. Kaj tio signifas ke la perturboj de iu ajn ordo estas sinsekve troveblaj: tuj kiam oni havas la perturbojn de la ordo k, oni povas trovi la perturbojn de la ordo (k+1) - solvonte la ekvacion (3,6). Kaj ĝi estas ĝenerale solvita jam ĉe la perturboj de la unua ordo - en la jam trovitaj esprimoj venas nur la funkcioj $\vec{f}_{k+1}$ anstataŭ $\vec{f}$. Se la nekonata vektoro el (3,6) estas notita kiel $\vec{x}_{k+1}$ kaj diskomponata laŭ (1,9)

$$(3,8) \qquad \vec{x}_{k+1} = \xi_{k+1}\vec{r} + \eta_{k+1}(\vec{c} \times \vec{r}) + \zeta_{k+1}\vec{c}\,,$$

oni havos la kompletan solvon en la formo (2,4), (2,12), (1,10), t.e.

$$(3,9) \qquad \vec{x}_{k+1} = \frac{r_o}{\mu\eta_o}\Bigg[(F_r - r^{-2}F_c)(yc_1 + \eta_o y^2 - c_2) - r^{-2}\frac{dr}{dy}\cdot$$
$$\cdot\int_0^y (yc_1 + \eta_o y^2 c_2)\cdot r(\vec{r}.\vec{f}_{k+1})dy - 2r^{-2}\eta_o\frac{dr}{dy}\cdot$$
$$\cdot\left(Q_1F_r - \int_0^y Q_1(\vec{f}_{k+1}\cdot d\vec{r})\right)\Bigg]\vec{r} + \left(\frac{r_o}{\mu}\right)^{3/2}\Bigg[c^{-2}F_cQ_2 -$$
$$- c^{-2}\int_{t_o}^{t} Q_2(\vec{c}\vec{r}\vec{f}_{k+1})\,dt + \int_0^y \frac{yc_1 + \eta_o y^2 c_2}{\eta_o r}(\vec{r}.\vec{f}_{k+1})\,dy -$$
$$- r^{-2}\int_0^y (\vec{r}.\vec{f}_{k+1})\frac{r}{\eta_o}(yc_1 + \eta_o y^2 c_2)\,dy - 2r^{-2}\left(Q_1F_r - \int_0^y Q_1\cdot\right.$$
$$\left.\cdot(\vec{f}_{k+1}\cdot d\vec{r})\right)\Bigg](\vec{c}\times\vec{r}) - c^{-2}\left[\vec{r}.\int_{t_o}^{t}(\vec{r}.\vec{f}_{k+1})\,dt\right]\vec{c}\,,$$

$$(3,10) \quad \eta_o = (\vec{r}_o.\vec{v}_o) : \sqrt{\mu r_o}, \quad F_c = \int_{t_o}^{t} (\overrightarrow{crf}_{k+1})\, dt, \quad F_r = \int_{o}^{y} (\vec{f}_{k+1}.d\vec{r}),$$

Q_1 el (2,3a), Q_2 el (2,11).

Oni ĉiam ĉi tie utiligas la fakton ke jam en la neperturba solvo-devis esti prenitaj la ekiraj donoj

$$(3,11) \quad \vec{r}(t_o) = \vec{r}_o, \quad \vec{v}(t_o) = \vec{v}_o .$$

Se la ekiraj donoj ne estas tiel donitaj, oni utiligos ilin konforme al la donitaĵoj, sed flankenlasu tiun demandon, kiel neesencan por ĉi tiu problemo.

4. Konkludaj vortoj

Laŭ ĉio tio oni povas facile trovi perturbojn de la ordo (k+1) se oni konas la solvon de la ordo (k), senkonsidere ĉu oni trovis tiun solvon per iu speciala vojo (altgrada, integrigon ebliganta, proksimumigo de la perturba forto, aŭ io simila), aŭ oni trovis ĝin sinsekve ek de la neperturbata moviĝo. La perturba forto povas deveni ne nur pro la gravitaj influoj, sed ankaŭ pro ĉiuspecaj aliaj influoj, kondiĉe nur ke ĝi estu seriigebla laŭ gradoj de iu malgranda faktoro δ. Notu tuj ke eĉ por kazo kiam δ ne estas tre malgranda, la proponata procedo estas tiom simpla ke oni povas ripeti ĝin plurfoje kaj iri ĝis alta grado de δ, do atingi tamen altan precizecon.

La solvo (3,9) estas eksplica kaj reala, ĉu por elipsecaj ĉu por hiperbolecaj orbitoj. La "esceptaj kazoj" venas nur se la orbito de la neperturbata moviĝo estas cirkla aŭ parabola (pro la denominatoroj kun η_o kaj kun ν^2). Sed ĉi tio estas facile evitebla per ŝanĝo de la ekira momento t_o, prenante tian t_o ke en tiu momento estu nulaj nek η_o nek ν^2 (se ili estus konstante nulaj, la perturboj ja ne ekzistus!). Do la solvo estas sufiĉe ĝenerala.

LA MENCIITA LITERATURO:

B a b a ĝ a n j a n c L.K., 1969a: Analitikaj metodoj de kalkulado de perturboj en la planedkoordinatoj, I (en la rusa), VESTNIK, Leningr. Univ., N^o 7, 121-139.

---------- 1969b: Metodoj por kalkuladoj de la perturboj en la rektangulaj planedkoordinatoj, II (en la rusa), samloke, N^o 19, 134-145.

B r o u w e r D., 1944: Integration of the equations of general planetary theory in rectangular coordinates, Astr. JOURNAL, 51, 37-43.

D a n b y J.M.A., 1962: Integration of the equations of planetary motion in rectangular coordinates, ASTR. JOURNAL, 67, 287-299.

K u s t a a n h e i m o P., 1960: On the determination of orbits of comets and asteroids, Soc. Sc. Fenn. Comm. Phys. Math., XXV, 2, 1-47 = PUBL. Astr. Observ. Helsinki, N^o 84.

----------, N u o t i o V.S. 1966: Lectures on Celestial Mechanics, I, Preprint N^o 2, Dept. of Applied Math. Univ. of Helsinki.

M u s e n P., 1963: On the General Planetary Perturbations in Rectangular Coordinates, Jour. Geophys. Res., 68, 9, 2727-2734.

----------, 1964: On a modification of Hill's method of general planetary perturbations, Journal des observateurs, 47,4, 73-84.

----------, 1965: On the general perturbations of the position vectors of a planetary system, Journal des Observateurs, 48,1, 1-17.

P o p o v i ć B., 1959: Kalkulado de planed - kaj kometefemeridoj senpere el iliaj pozicio kaj rapido, BULLETIN de l'Obs. astr. Beograd, XXIV, 1-2, 13-24 (1960).

----------, 1961a: Redukto al kvadraturoj de la unua ordo en planedaj pozicivektoroj, BULLETIN de la Soc. math. phys. de Serbie, Beograd, XIV (1962), 1-4, pp. 169-186.

----------, 1961b: Ueber die zu Quadraturen reduzierten Störungen zweiter Ordnung der Planetenortsvektoren, ANNALES Acad. Sc. Fennicae, Ser, A, III, 61, Helsinki, 211-215.

----------, 1970: Kalkulado de orbitelementoj de planedeto aŭ kometo senpere el pluraj observoj, Matem VESNIK, 7 (22), 2, 235-246.

S t u m p f f K., 1947: Neue Theorie und Methode der Ephemeridenrechnung, Abh. Ak. Wiss., Berlin, Math.-nat. Klasse 1, 1-88.

----------, 1959: Himmelsmechanik, I, Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Resumo

ĜENERALA SOLVO POR LA EKVACIO DE PERTURBOJ EN REKTANGULAJ KOORDINATOJ

/Bož.Popović, Beograd, Jugoslavio/

Celo: trovi eksplican kaj sufiĉe ĝeneralan solvon por perturboj en rektangulaj koordinatoj, utiligante la propran vojon, el Popović 1961a, 1961b (kie estas trovita la solvo por perturboj de la unua kaj dua ordoj, sed ne ĉiuj integraloj en ĝi estis proprecaj).

1. Perturboj de la unua ordo. Kun (1,1) por perturbata kaj (1,2) por la neperturbata moviĝo, oni retrovas la ekvacion (1,6) por perturboj de la unua ordo. Vektora multipliko per $\vec{r}$ kondukas al la unua integralo (1,7), kun la ekiraj donoj (1,8). La diskompono (1,9) kaj skalaraj multiplikoj per $\vec{r}$, $d\vec{r}/dt$ kaj $\vec{c}$ donas (1,10), (1,11), kio kun skalara multipliko de (1,6) per $\vec{r}$ donas (1,12). Aliflanke, skalara produto de (1,6) per $\vec{v}$ donas la alian integralon (1,14), el kiu pro (1,9) kaj (1,11) sekvas (1,15). Plej konvenan solvon ebligas enkonduko de nova sendependa variablo ("reguliga anomalio") y (Stumpff 1947, Popović 1959, Kustaanheimo 1960), difinita per (1,16). La funkcioj (1,17), kun la ecoj (1,17) - (1,20), ebligas realecon por ĉiuspecaj orbitoj. La solvoj de (1,15) kaj (1,11) estas tiam (1,22) kaj (1,23).

2. Plisimpligoj de la esprimoj por unuaj perturboj. Utiligante diversajn aliformigojn kaj la rilatojn inter la uzataj kvantoj, oni trovas unue (2,1) kaj (2,4), kun Q_1 el (2,3a) kaj γ el (2,5) [Atentu nur ke en tiuj esprimoj η, ζ, kies signifo estas donita en (1,20), diversas de η, ζ kiel koordinatoj el la diskompono (1,9)!] Similaj procedoj donas (2,6), sed por eviti duoblan integrigon (en la unua integralo) venas pluraj form turnoj por kalkuli Q_2 el (2,7) kaj riĉevi (2,11). Tio donas por η (2,12), kun nur unuoblaj integrigoj.

3. Perturboj de superaj ordoj. Se oni havas solvon enhavantan almenaŭ perturbojn de la ordo (k), kontentiganta do la ekvacion (3,1), tiam (3,3) kaj (3,4) devus doni perturbojn de la ordo (k+1). Montriĝas ke en (3,4) estas forĵetinda ĉio ekster (3,6), kun $\vec{r}_{k+1}$ el (3,5a), resp. (3,7). La diskompono (3,8) permesas utiligi la solvon por perturboj de la unua ordo, do oni tuj havas (3,10), kun la ekiraj donoj (3,11).

4. Konkludaj vortoj. La solvo estas tute eksplica kaj sufiĉe ĝenerala, en pluraj direktoj: 1) utiligebla ĉu por sinsekva kalkulado de la perturboj (k = = 1,2,3,...) ĉu por kalkuli perturbojn de unu plia grado kiam estas konataj (per ajna vojo) perturboj de difinita ordo; 2) la perturboforto povas esti ne nur gravita, sed ĝi povas havi ajnan devenon - nur oni povu seriigi ĝin laŭ gradoj de eta faktoro δ(eĉ se ĝi ne estas tre malgranda, la proponita procedo estas tiel simpla ke oni povas plurfoje ripeti ĝin kaj atingi altan precizecon); 3) la solvo estas reala senkonsidere ĉu la neperturba orbito estas elipsa aŭ hiperbola (la "esceptaj kazoj" de cirklo kaj de parabolo estas eviteblaj simple per ŝanĝo de la ekira momento t_0, tiel ke tiam estu nulaj nek η_0 nek ν).

Abstract

A GENERAL SOLUTION
OF THE EQUATION OF PERTURBATIONS IN RECTANGULAR COORDINATES
(Bož. Popović, Beograd, Jugoslavio)

Object: to find a explicit and sufficiently general solution for perturbations in rectangular coordinates, using the own way, from Popović 1961a, 1961b, (where has been found a solution for perturbations of the first and second order, but not all integrals there are proper).

1. Perturbations of the first order. With (1,1) for perturbed motion and (1,2) for the unperturbed one, it follows (1,6) for first order perturbations. Its vector multiplication by $\vec{r}$ gives a first integral (1,7), with the initial conditions (1,8). Disintegration (1,9) and scalar multiplications by $\vec{r}$, $d\vec{r}/dt$, $\vec{c}$, give (1,10), (1,11), thereafter (1,12), using also scalar multiplication of (1,6) by $\vec{r}$. Otherside, scalar multiplication of (1,6) by $\vec{v}$ gives another integral (1,14), therefrom - considering (1,9) and (1,11) - follows (1,15). Most convenient solution can be found introducing, as new independent variable, "regularisation anomaly" y (Stumpff 1947, Popović 1959, Kustaanheimo 1960), by the relation (1,6). The functions (1,17), with properties (1,17) - (1,20), enable the reality at orbits of all kinds. Then the solutions of (1,15) and (1,11) are (1,22) and (1,23).

2. Simplifying of the expressions for first order perturbations. By many modifications and relations between the used quantities it is found firstly (2,1) and (2,4), with Q_1 as (2,3a) and γ as (2,5). [Note only that in the expressions here η, ζ, whose meaning is given in (1,20), are diferent from η, ζ as the coordinates in the disintegration (1,9)]. By similar way comes (2,6), but to avoid double integration (in the first integral), many modifications were made for expressing Q_2 of (2,7) into the form (2,11). That gives η as (2,12), with only simple integrations.

3. Perturbations of higher orders. If one has a solution containing at least perturbations of order (k), therefore satisfying the equation (3,1), then (3,3) and (3,4) should give perturbations of order (k+1). Showed that in (3,4) could be removed all besides (3,6), with $\vec{f}_{k+1}$ from (3,5a), resp. (3,7). The disintegration (3,8) permits to use the solution, found for first order perturbations, then immediately follows (3,10), with the initial conditions(3,11).

4. Conclusion words. The solution is wholly explicit and enought general, at many directions: 1) it is usable whether to calculate the consecutive perturbations (k=1,2,3,...) or to calculate the perturbations of one order more if known (by anyone way) the perturbations of definite order; 2) the disturbing forces can come not only because the gravity but also from any other cause - they only can be present as a series along degrees of a little δ(even if it is not very little, the presented way is so simple that one can repeat it several times to reach a high precision); 3) the solution is real regardless whether the unperturbed orbit is elliptical or hyperbolic (the "except cases" - circle or parabola - can be avoided simply by changing the initial time t_o so that neither η_o nor ν may be zero).