SCIENCA REVUO de Internacia Scienca Asocio Esperantista BEOGRAD, Jugoslavio | El Vol. 22 n-ro 5-6/91-92 25.12.1971.

# BAZAJ KONCEPTOJ DE KINEMATIKO DE MOTORA MEKANIKO

(P. Kustaanheimo, Helsinki, Finnlando)*

- Dediĉita al la memoro de Yrjö Väisälä -

## 1. Enkonduko

La tradicia bazo de astrodinamiko estas la mekaniko de Newton. Ekzistas ankaŭ Einsteina mekaniko laŭ la speciala teorio de relativeco, kiu estas uzata anstataŭ la Newtona mekaniko, kiam temas pri movoj kun rapidoj proksimaj al tiu de lumo. Laŭ la relativica teorio, astronaŭtoj povus viziti eĉ malproksimajn stelojn kaj bezonus por tio nur parton de sia vivtempo, se ili veturus kun rapido proksima al tiu de lumo. Tiaj rapidaj movoj de spacaj veturiloj devas esti kalkulataj laŭ alia ol la Newtona mekaniko. Oni bezonas sintezon inter la speciala teorio de relativeco kaj gravito. Estas eble konstrui teoriojn de gravito sur bazo de la Einsteina mekaniko de la speciala teorio de relativeco (ekz. [1], [2],[3], [4], [5] ,[7], [13], [14], [16], [19] ), sed ĉiu nun ekzistanta tia teorio ŝajnas nekontentiga, ne konvinka, kvankam ili ĉiuj estas ĝustaj fizikaj teorioj laŭ la pozitivisma vidpunkto. Ili, same kiel la gravita teorio de Einstein nomata la ĝenerala teorio de relativeco, antaŭdiras en la ĝisnuna ĉielmekanika kaj astrodinamika praktiko nur kelkajn malgrandajn perturbojn aldone al la perturboj de la Newtona gravita teorio.

*Akademio de Finnlando, Helsinki

Tiaj perturboj ŝajnas vere ekzisti, almenaŭ parte, kaj do decidi kontraŭ la gravita teorio de Nowton, sed oni ne konas ilin sufiĉe kaj ili ne depandas sufiĉe forte de la strukturoj de la malsamaj teorioj, por ke oni povu decidi favore al certa teorio surbaze de observoj de tiuj perturboj. Kaj ĉiaokaze la kalkulado de movoj laŭ ĉiu ekzistanta relativeca teorio de gravito estas multe pli komplika ol laŭ la Newtona teorio. Tiu komplikeco estas sekvo de la manko de la plej multaj Newtonaj konceptoj en la relativecaj mekanikoj. La malapero de la absoluta samtempeco forprenas la komunan sendependan varianton de la Newtonaj diferencialaj ekvacioj de movo, kaj tiuj ekvacioj devas esti anstataŭigataj per komplikaj diferencialaj kaj diferencaj ekvacioj kun malsamaj propraj tempoj de la malsamaj maspunktoj. Samtempe malaperas la fruktodona principo pri ago kaj reago kaj kun ĝi la plej multaj konserviĝaj principoj de la Newtona mekaniko. La Einsteina speciala teorio de relativeco estas origine teorio pri elektrodinamiko, al kiu oni poste aldonis mekanikon en maniero ne konvinka. La eksperimentoj montras, ke tiu mekaniko estas ĝusta parto de kontentiga relativeca mekaniko, sed ĝi ne nepre estas la tuta relativeca mekaniko.

Ĝis nun la sola ideo el relativeca fonto, kiu havas praktikan signifon en la astrodinamiko, estas la spinora reguligo [8] de la movekvacioj, kiu anstataŭigas la Newtonan gravitan movekvacion per lineara diferenciala ekvacio kaj tiel simpligas ekzemple la teorion de la Keplera movo (ekz. la teorion pri flugtempo kaj pri la aliaj energiaj identaĵoj [11] ) kaj la teorion de perturboj [12]. Tiu spinora reguligo estas tute nekomprenebla el la vidpunkto de la Einsteina mekaniko, sed montras la vojon al nova sintezo inter elektrodinamiko (= speciala teorio de relativeco) kaj mekaniko, tiel, ke pli multaj el la Newtonaj konceptoj estas savataj.

En ĉi tiu artikolo la kinematiko de la nova relativeca "motora" mekaniko estas traktata- La dinamiko aperos pli malfrue, verŝajne en la revuo "Celestial Mechanics".

## 2. Matematika ilaro

La matematika ilaro, kiun ni bezonas en ĉi tiu artikolo, estas la teorio de vektoroj kaj motoroj de unua rango el la spinorringalgebro [6], [10], [15], [17], [18], [20]. Tiu parto de la spinorringalgebro povas esti prezentata ankaŭ pere de kompleksaj 2 x 2 matricoj, kaj ni uzos tiun metodon ĉi tie. Do ĉiuj simboloj en ĉi tiu artikolo 2 x 2 matricoj kun kompleksaj nombroj, kaj ni do povas forlasi la vorton "matrico". Kompleksaj nombroj mem estas identigataj kun la respondaj skalaraj matricoj.

La latinaj indicoj a,b,c,d,e,f,g,h trakuras tri valorojn: x,y,z; la grekaj $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... kvar valorojn: x,y,z,t. La sumiga regulo estas valida: $a_a b_a = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, $a_\alpha b^\alpha = a_a b^a + a_t b^t$, k.t.p.

Kiel bazon de niaj 2 x 2 matricoj ni uzas la tri senspurajn Pauli-matricojn $i_a = i^a$ kun la multiplika tabelo

(2.1) $i_a i_b = \delta_{ab} + i\varepsilon_{abc} i_c$ (i = imaginara unuo: $i^2 = -1$)

kaj la skalaran matricon

(2.2) $i^t = -i_t = 1$

Ĉiu matrico a povas esti skribata

(2.3) $a = a_\alpha i^\alpha = a^\alpha i_\alpha = a_t + a_a i_a$

kun determinitaj kompleksaj komponantoj $a_a = a^a$, $a_t = -a^t$.

La spuro kaj determinanto de a estas

(2.4) $\mathrm{tr}(a) = 2a_t$, $\det(a) = a_t^2 - a_a a_a$

Se $a_t = b_t = 0$, ni havas

(2.5) $ab = a_a b_a + i\varepsilon_{abc} a_a b_b i_c$ .

(2.6) $a_a b_a = 0.5\ (ab + ba) = (ab)_t$

(2.7) $\varepsilon_{abc} a_a b_b i_c = -0.5\ i(ab - ba) = -i(ab)_a i_a$

La baza aŭtomorfismo $a \rightarrow \bar{a}$ de la spinorringalgebro estas

(2.8) $\bar{a} = a_t' - a_a^\circ i_a$

kaj la baza antiaŭtomorfismo $a \rightarrow a^\circ$ estas

(2.9) $a^\circ = a_t^\circ + a_a^\circ i_a$

kie $b^\circ = \bar{b}$ estas la kompleksa konjugito (skalara matrico) de b, kiam $b_a = 0$. Oni havas

(2.10) $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$, $\overline{ab} = \bar{a}\,\bar{b}$, $(a+b)^\circ = a^\circ + b^\circ$, $(ab)^\circ = b^\circ a^\circ$
$(\bar{a})^\circ = \overline{a^\circ} = \bar{a}^\circ$ , $\bar{\bar{a}} = a$, $(a^\circ)^\circ = a$

La matrico a estas hermita, se $a^\circ = a$, kaj antihermita, se $a^\circ = -a$. Ĉiu a haves determinitajn partojn

(2.11) $a = a_r + ia_s$, $a_r = 0.5\,(a + a^\circ)$, $a_s = -0.5\,i\,(a - a^\circ)$

(2.12) $a = a_{tr} + ia_{ts} + a_{ar}i_a + ia_{as}i_a$, $a_{\alpha r} = a_{r\alpha}$, $a_{\alpha s} = a_{s\alpha}$

(2.13) $a = 0.5(a+\bar{a}) + 0.5(a-\bar{a})$, $0.5(a+\bar{a}) = a_{tr} + ia_{as}i_a$, $0.5(a-\bar{a}) = ia_{ts} + a_{ar}i_a$

(2.14) $0.5\mathrm{tr}(a) = a_t = a_{tr} + ia_{ts} = 0.5(a+\bar{a}^\circ)$, $a_a i_a = a_{ar}i_a + ia_{as}i_a = 0.5(a-\bar{a}^\circ)$

kiuj restas senŝanĝaj aŭ nur ŝanĝas la antaŭsignon sub la operacioj $a \to a^\circ$ kaj $a \to \bar{a}^\circ$. La determinanto de a estas ankaŭ

(2.15) $\det(a) = a\bar{a}^\circ = \bar{a}^\circ a$

Se a estas hermita, $a^\circ = a$, tiam $\det(a) = a\bar{a} = \bar{a}a = a_t^2 - a_a a_a$ estas reala nombro (skalara matrico), kaj ni difinas la longon de a pere de

(2.16) $|a| = +(\pm\, a\bar{a})^{1/2}$ = nenegativa reala nombro

Se a estas senspura kaj hermita, $a^\circ = a$, $a_t = 0$, tiam $a^2 = aa = |a|^2 = -\det(a) = a_a a_a$. La senspuraj hermitaj matricoj povas esti uzataj kiel 3-dimensiaj vektoroj kun la ortnormuma bazo $i_a$. La skalara kaj vektora produtoj estas donataj de (2.6) kaj (2.7).

La hermitaj matricoj povas esti uzataj kiel 4-dimensiaj vektoroj en la spactempo de Minkovski: $i^t = 1$ estas tempa unuvektoro en la direkto al la estonteco kaj $i_a$ spacaj unuvektoroj. La Lorentza produto de du tiaj vektoroj, a kaj b, estas

$$(2.17)\quad -(a\bar{b}^{\circ})_t = -(a\bar{b})_t = a_\alpha b^\alpha = a_a b_a - a_t b_t$$

Ni diras, ke a estas orta al b, kiam $(a\bar{b}^{\circ})_t = 0$.

La Lorentzaj transformoj de la Minkovskia spactempo povas esti prezentataj sub la formo

$$(2.18)\quad x^{\circ} = SxS^{\circ}$$

kie x estas hermita kaj S unumodula:

$$(2.19)\quad S\bar{S}^{\circ} = \det(S) = 1$$

Ĉiun matricon x, kiu transformiĝas laŭ (2.18) sub la Lorentza transformo S, ni nomas vektoro, ankaŭ, kiam ĝi havas kompleksajn komponantojn. Se x estas vektoro, tiam ankaŭ $x^{\circ}$, $x_r$ kaj $x_s$ estas vektoroj. Do la disigo (2.11) estas Lorentze nevaria.

Matrico m, kiu transformiĝas laŭ

$$(2.20)\quad m^{\circ} = Sm\bar{S}^{\circ} = SmS^{-1}$$

sub la Lorentza transformo S, estas nomata motoro. Kune kun m ankaŭ $\bar{m}^{\circ}$, $m_t$ kaj $m_a i_a$ estas motoroj, kaj la disigo $m = m_t + m_a i_a$ estas do Lorentze nevaria. Skalaroj estas apecialaj motoroj.

El du vektoroj, x kaj y, ni povas formi motoron $x\bar{y}^{\circ}$. Tial ekz. la konstruo (2.17) estas Lorentze nevaria. El motoro m kaj vektoro x ni ricevas vektorojn $mx, xm^{\circ}$, $(mx_r)$, $(mx)_s$, k.t.p. La sumo, diferenco kaj produto de du motoroj estas denove motoro.

Senspura motoro m aŭ estas 0-motoro kun $m^2 = m_a m_a = 0$ aŭ povas esti skribata

$$(2.21)\quad m = kg,\ k = (-m^2)^{1/2} = (m_a m_a)^{1/2},\ g = k^{-1}m,\quad g^2 = -1$$

kun senspura unumodula motoro g kaj kompleksa skalaro $k \neq 0$. La 2-dimensia spaco de la hermitaj propraj vektoroj u, kiuj apartenas al la propra nombro 1 de la Lorentza transformo $x' = gxg^{\circ}$ kaj do kontentigas.

$$(2.22)\quad u = gug^{\circ},\quad gu + ug^{\circ} = 0$$

estas nomata akso de la motoro m.

Ni diras, ke motoro m estas hermita ĉe la hermita tempa (det(x)> > 0) vektoro x, se la vektoro mx estas hermita: $(mx)_s = 0$. El (2.21) kaj (2.22) sekvas, ke m estas hermita ĉe hermita tempa x ekzakte, kiam x apartenas al la akso (2.22) de m kaj $k_r = 0$, ĉar $(mx)_s = 0$ estas la sama kiel $k_r(gx - xg^\circ) + ik_s(gx + xg^\circ) = 0$, la vektoroj $gx-xg^\circ$ kaj $gx+xg^\circ$ estas ortaj unu al la alia kaj ambaŭ al x, kaj la tempa x ne povas esti propra vektoro apartenanta al la propra nombro -1 de la transformo $x' = gxg^\circ$: $x = -gxg^\circ$, $gx - xg^\circ = 0$. Tia motoro hermita ĉe x do havas formon $m = ik_s g$, kaj $m^2 = k_s^2 \geqslant 0$.

Ĉiuj motoroj m hermitaj ĉe x estas ricevataj el $m = y\bar{x}$, kiam y trakuras ĉiujn hermitajn vektorojn. La parto de y orta al x donas la senspuran parton de m kaj la parto de y paralela al x donas la skalaran parton de m. Se $m_1$ kaj $m_2$ estas hermitaj ĉe x, ankaŭ $m_1+m_2$, $m_1m_2+m_2m_1$, $i(m_1m_2 - m_2m_1)$ kaj $\bar{m}^\circ$ estas hermitaj ĉe x.

## 3. Movo de maspunkto

La Newtona mekaniko traktas movojn relative al la absoluta spaco. La Einsteina mekaniko anstataŭigas la absolutan spacon per la same absoluta spactempo. En astrodinamiko tiu spaco aŭ spactempo estas identigata kun la universo de galaksioj. La Newtona kaj Einsteina spactempoj estas homogenaj: la movoj ne dependas de la loko en spaco aŭ tempo. Tiu "kompleta kosmologia principo" ne estas necesa. Kontraŭe, la universo de galaksioj ŝajnas esti homogena nur en spaco sed ne en tempo.

Kiel bazon de la mekaniko ni do elektas idealigon de la vastiĝanta universo: En lineara 4-dimensia Minkovskia spactempo

(3.1) $\quad x = x_\alpha i^\alpha = x_t + x_a i_a, \quad x_\alpha$ realaj nombroj,

de la speciala teorio de relativeco ekzistu absoluta 0-punkto $x = 0$ kaj ĉiuj maspunktoj de mekaniko movu en la lumkonuso

(3.2) $\quad \det(x) = x\bar{x} = x_t^2 - x_a x_a > 0, \; x_t > 0$

En ĉiu punkto (3.1) en la konuso (3.2) ni havas difinitan kosmologian tempon

(3.3) $\quad s = +(x\bar{x})^{1/2} = |x|$

kiu estas la distanco inter x kaj 0.

La movo de maspunkto estas kurbo

(3.4) $x = x(s) = s\,u(s)$

en (3.2), kun tempa aŭ luma tanĝantvektoro

(3.5) $dx/ds = u + s\,du/ds, \quad (dx/ds)(d\bar{x}^{\circ}/ds) \geq 0$

La movo estas konata, se oni konas la unuvektoron $u(s) = s^{-1}x$ kiel funkcion de s. La punktoj u situas en la spactempo sur la 3-dimensia sfera surfaco $u\bar{u} = 1$.

La kurbo (3.4) en la 4-dimensia spactempo estu nun movo de maspunkto, kiun oni povas observi laŭ la (elektrodinamikaj) leĝoj de la speciala teorio de relativeco. Sed la mekaniko estu difinita kiel teorio de la movo u(s) sur la 3-dimensia sfera surfaco, sur kiu validas la klasika 3- dimensia neeŭklida geometrio de Gauss-Bolyai-Lobaĉevski [18].

Ni skribas

(3.6) $u = bu_o b^{\circ}$

laŭ la ideo de la spinora reguligo [8] en ĝia relativeca formo [9], [17], kio signifas, ke ni kvazaŭ anstataŭigas la vektorn u per ĝia "kvadratradika" motoro b. En (3.6) $b = b(s)$ estas unumodula motoro, $b\bar{b}^{\circ} = 1$, $b(s_o) = 1$, kaj do Lorentza transformo de $u_o$ al u, kaj $u_o$ estas konstanta hermita unumodula vektoro $u_o = u(s_o)$. El (3.6) sekvas

(3.7) $du/ds = (db/ds)u_o b^{\circ} + bu_o(db^{\circ}/ds) = 2((db/ds)\bar{b}^{\circ}u)_r$

kiun ni skribas sub la produta formo

(3.8) $du/ds = 2(db/ds)\bar{b}^{\circ}u$

postulante laŭ la spinora reguligo la aldonan kondiĉon

(3.9) $((db/ds)\bar{b}^{\circ}u)_s = 0$

Tiam la motoro $2(db/ds)\bar{b}^{\circ}$ estas determinata de u kaj du/ds:

(3.10) $2(db/ds)\bar{b}^{\circ} = (du/ds)\bar{u}$

kaj estas senspura, ĉar $u\bar{u} = 1$.

Se ni skribas la motoron (3.10) sub la formo (2.21), ni vidas, ke, laŭ la teorio en ĉapitro 2, (3.10) havas la formon $i\, k_s g$ kaj ke u situas sur la akso (2.22) de (3.10).

La derivaĵo (3.5) estas nun

(3.11) $dx/ds = u + 2s(db/ds)\bar{b}^{\bullet}u$

kun

(3.12) $(dx/ds)(d\bar{x}/ds) = 1 - 4s^2((db/ds)\bar{b}^{\bullet})^2 = 1 - s^2k_s^2$

kaj (3.12) fariĝas 0, kiam $k_s = \pm\, s^{-1}$.

Ni enkondukas novan sendenpendan varianton $\tau = \tau(s)$, la "dinamikan tempon", tiel, ke $((du/d\tau)\bar{u})^2 = 1$ respondu al la lima rapido de lumo. Devas do esti $d\tau/ds = s^{-1}$ kaj

(3.13) $\tau = \log \text{nat}\ s + \text{konst.}$

Ni notacias $u' = du/d\tau$, $x' = dx/d\tau$, k.t.p., kaj nomas

(3.14) $c = u'\bar{u} = 2b'\bar{b}^{\bullet} = ikg, \quad 0 \leqslant k \leqslant 1, \quad g^2 = -1$

la rapidmotoro de la movo (3.4).

Se $c^2 = k^2 = 0$, estas ankaŭ $c = 0$, kaj la movo estas tiu de la kosmologia substrato, do rekta linio en spactempo. Se $c^2 = k^2 = 1$, ni havas movon de lumo, kiu ankaŭ povas esti kurba.

Unuforma movo estas en la mekaniko de la speciala teorio de relativeco difinita kiel movo, kies 4-rapido ($\sigma$ = propra tempo de la movo)

(3.15) $dx/d\sigma = |x'|^{-1}x' = (1 - c^2)^{-1/2}(1 + c)u$

estas konstanta 4-vektoro. El la motora vidpunkto estas pli nature nomi movon unuforma, kiam la rapidmotoro $c = ikg$ estas konstanta: $c' = 0$. Tiam oni povas integri la diferencialan ekvacion $u' = cu$ aub la formo

(3.16) $u = \exp(c\tau)\, u_0 = u_0 \operatorname{coshyp}(k\tau) + igu_0 \operatorname{sinhyp}(k\tau)$

kaj ricevas $x(\tau)$ sub la formo

(3.17) $x = su = s_0\,(u_0 \operatorname{coshyp}(k\tau) + igu_0 \operatorname{sinhyp}(k\tau))\exp(\tau)$

La kurbo (3.16) estas rekta linio en la 3-dimensia neeŭklida geometrio de la 1-sfero $u\bar{u} = 1$, nome la intersekco de la sfero kaj de la 2-ebeno enhavanta la hermitajn vektorojn $u_0$ kaj $igu_0$. La movo okazas laŭ tiu linio kun la konstanta rapido $(-u'\bar{u}'^{\bullet})^{1/2} = (-\det(u'))^{1/2} = (-c\bar{c}^{\bullet})^{1/2}(u\bar{u}^{\bullet})^{1/2} = (c^2)^{1/2} = k$. La kurbo (3.17) estas speco de logaritma spiralo en la 4-dimensia spactempo, ĉar la rilato $(c^2)^{1/2} = k$ inter la longoj de la du komponantoj, $(1-c^2)^{-1/2}cu$ orta al x kaj $(1 - c^2)^{-1/2}u$ paralela al x, de (3.15) estas konstanta. La diferenco inter la spiraloj (3.17) kaj la rektaj linioj en la spactempo estas tre malgranda kaj verŝajne ne observebla en la nuna epoko s ĉe la distanco de kelkaj miliardoj da lumjaroj de 0. En la kazo de lumo, $k = 1$, tiu spiralo devas denove fariĝi rekta linio, laŭ la speciala teorio de relativeco, kaj vere ni ricevas el (3.17) tiam la rektan linion

(3.18) $$x = 0.5\ s_o(u_o - igu_o) + 0.5\ s_o(u_o + igu_o)\exp(2\tau)$$

## 4. M o v o  d e  r i g i d a  k o r p o

La spinora reguligo (3.6) sen la aldona kondiĉo (3.9) donas ĝeneralan movon de rigida korpo en la 3-dimensia neeŭklida geometrio de la 1-sfero $u\bar{u} = 1$, se ni sekvas la movojn de ĉiuj punktoj $u_o$ sur tiu sfero: $u_o\bar{u}_o = 1$.

Ni konsideru la punktojn u en la proksimeco de iu arbitra punkto. Ni povas ĉiam uzi tian koordinatsistemon, ke tiu arbitra punkto en tiu momento estas $u = 1$. La punktoj u en la proksimeco de 1 havas en tiu koordinatsistemo la pozicivektorojn $u = u_t + u_a i_a$ kun malgrandaj realaj komponantoj $u_a$ kaj kun $u_t = +(1+u_a u_a)^{1/2}$.

La rapidoj de u estas

(4.1) $$u' = b'u_o b^\bullet + bu_o b'^\bullet = (cu)_r = 0.5\ (cu + uc^\bullet)$$

kun la senspura rapidmotoro

(4.2) $$c = 2b'\bar{b}^\bullet = c_r + ic_s = (k_r + ik_s)g,\ k = (-c^2)^{1/2},\ g^2 = -1$$

aŭ

(4.3) $$u'_a = u_t c_{ra} - \varepsilon_{abc} c_{sb} u_c,\quad u'_t = c_{ra} u_a$$

Do $c_r$ estas proksimume la klasika translacia rapido de la punkto $u_a = 0$ de la rigida korpo kaj $-c_s$ estas la angulrapidvektoro de la korpo. Se ni uzas la alian formon (4.2), $c = kg$, ni ricevas

(4.4) $$u' = 0.5\ k_r(gu + ug^\bullet) + 0.5\ ik_s(gu - ug^\bullet)$$

kiu montras, ke absoluta valoro de la rapido, $|u'| = +(-u'\bar{u}')^{1/2}$, estas minimumo, $= k_s$, sur la akso $gu + ug^\bullet = 0$ de c. Se oni uzas tian koordinatsistemon, ke u = 1 situas sur la akso, tiam $g_r = 0$, $g_s^2 = 1$, kaj

(4.5) $\quad u'_a = -k_r\, \varepsilon_{abc} g_{sb} u_c - k_s u_t g_{sa}, \quad u'_t = -k_s g_{sa} u_a$

Do $k_s$ estas absoluta valoro de la translacio kaj $k_r$ de la rotacio. La aldona kondiĉo (3.9) de la relativeca spinora reguligo signifas, ke la movo de maspunkto estas pura translacio, sur kies akso (en neeŭklida geometrio ankaŭ translacio havas difinitan ŝraŭbakson) la maspunkto situas.

Ankaŭ en la kazo de pura translacio, $k_r=0$, la punktoj,kiuj situas en la orta distanco $d=(u_a u_a-(u_a g_{sa})^2)^{1/2}$ de la akso, havas iomete pli grandan rapidon ol la punktoj sur la akso, nome la rapidon

(4.6) $\quad |u'| = k_s(u_t^2\, g_s^2 - (g_{sa} u_a)^2)^{1/2} = k_s(1 + d^2)^{1/2}$

Tiu rapido (4.6) ne rajtas superi la luman rapidon 1, kaj tial rigida korpo en la motora mekaniko povas maksimume havi diametron $2(c^{-2}-1)^{1/2}$ kiam ĝia centro havas la rapidmotoron c. En la kazo de ĝenerala rigidkorpa movo, $k_r \neq 0$,la maksimuma diametro estas $2(1-k_s^2)^{1/2}(k_s^2 + k_r^2)^{-1/2}$ laŭ (4.5)

## 5. Nevarieco rilate aldonan translacion

Ĉiuj formuloj en capitroj 3 kaj 4 estas Lorentze nevariaj, ĉar ili estas konstruitaj el vektoroj kaj motoroj laŭ la leĝoj en ĉapitro 2, tiel, ke la rezulto ĉiam estas vektoro aŭ motoro. Tiu Lorentza nevarieco signifas, ke oni povas rotacii la koordinatsistemon de la spactempo ĉirkaŭ la punkto 0 sen ŝanĝo en rormo de la ekvacioj. Ĉi tiuj 6-parametraj rotacioj de la 4-dimensia spactempo respondas al translacioj (3 parametroj) kaj rotacioj (3 parametroj) de la 3-dimensia neeŭklida geometrio sur la 1-sfero $u\bar{u} = 1$.

En la Newtona kaj Einsteina mekanikoj ekzistas ankoraŭ plua nevarieco: la interna movo de sistemo de maspunktoj ne dependas de translacio de la tuta sistemo tra la spaco. Tial la fortoj inter maspunktoj povas dependi nur de la relativaj pozicioj (ekz. diferencoj de pozicivektoroj) kaj de la relativaj rapidoj (ekz. diferencoj de rapidvektoroj) inter la maspunktoj.

En la motora mekaniko la hermita diferenco de du pozicivektoroj sur la 1-sfero, $u_1 - u_2$, estas plej nature reduktata al motoro hermita ĉe $u_1$ (aŭ $u_2$) per multipliko per $u_1$ (aŭ $\bar{u}_2$): $(u_1-u_2)\bar{u}_1=1-u_2\bar{u}_1$. La natura nevaria relativa pozicio estas do la kvocientmotoro de la du poziciveKtoroj: $u_2\bar{u}_1= u_2u_1^{-1}$, aŭ ĝia senspura parto: $(u_2\bar{u}_1)_a i_a = 0.5\cdot(u_2 - u_1)(\bar{u}_2 + \bar{u}_1)$.

Ankaŭ el du rapidvektoroj, $u_1'$ kaj $u_2'$, oni povas konstrui motoron de relativa rapido, kiu estas sendependa de aldona translacio de la du punktoj, $u_1$ kaj $u_2$.

Aldona translacio signifas, ke u estas anstataŭigata per

(5.1) $v = aua^{\cdot}$

kie la unumodula motoro a de la aldona Lorentza transformo estas = 1 en la momento de konsidero, sed $a' \neq 0$. Plue la motoro $2\, a'\bar{a}^{\cdot} = 2a'$ devas esti motoro de translacio kaj do havi la formon

(5.2) $2a'= iqh, \quad 0 < q < 1, \; h^2 = -1$

Tiam la rapido $u'= cu$ estas anstataŭigata per

(5.3) $v'= au'a^{\cdot} + a'ua^{\cdot} + aua'^{\cdot} = u'+ 0.5\ iqhu - 0.5\ iquh^{\cdot}$

Se ni uzas tian koordinatsistemon, ke 1 situas sur la akso de $a'$, ni haves plue $h_r = 0$ kaj

(5.4) $v'= u'- qu_t h_s - qu_a h_{sa}$

El (5.4) ni vidas, ke diferencoj de $v'$ estas sendependaj de $a'$, se oni dividas ĉiun $v'$ per la responda $u_t$ kaj konsideras nur la senspuran parton de la motoro $v' = v'\bar{1}^{\cdot}$ hermita ĉe la arbitra punkto 1 sur la ekso de (5.2). La dividanto $u_t = (u\bar{1}^{\cdot})_t$ mezuras la Lorentze nevarian distancon inter u kaj 1 en la 3-dimensia neeŭklida geometrio. Se ni skribas $u_o$ anstataŭ 1, ni do konstatas, ke la motoro

(5.5) $(u_1\bar{u}_o)_t^{-1}(u_1'\bar{u}_o)_a i_a - (u_2\bar{u}_o)_t^{-1}(u_2'\bar{u}_o)_a i_a$

estas nevaria relativa rapido en la motora mekaniko.

Estas interese konstanti, ke la motoroj

(5.6) $(u\bar{u}_o)_t^{-1}(u'\bar{u}_o)_a i_a = (u\bar{u}_o)_t^{-1}(u'\bar{u}u\bar{u}_o)_b i_b = (u\bar{u}_o)_t^{-1}(u'\bar{u}((u\bar{u}_o)_t +$

$+ (u\bar{u}_o)_a i_a))_b i_b = u'\bar{u} + (u\bar{u}_o)_t^{-1}(u'\bar{u}(u\bar{u}_o)_a i_a)_b i_b =$

$$= u'\bar{u} + (u\bar{u}_o)_t^{-1}\, 0.5(u'\bar{u}u\bar{u}_o - u\bar{u}_o u'\bar{u} = 0.5(u\bar{u}_o)_t^{-1}(u'\bar{u}u\bar{u}_o + u_o\bar{u}u'\bar{u}) =$$

$$= 0.5\, (u\bar{u}_o)_t^{-1}\, (u'\bar{u}_o - u_o\bar{u}')$$

estas senspuraj kaj hermitaj ĉe $u_o$, kaj ke ilia kvadrato ĉiam estas reala nombro inter 0 kaj 1. La kvadrato de (5.5) estas ĉiam reala nombro inter 0 kaj 4.

## 6. Proogramo por la motora dinamiko

La derivaĵo

(6.1) $u'' = c'u + cu' = c'u + c^2u$

de $u' = cu$ montras, ke la senspura akcela motoro $c'$ ankaŭ estas hermita ĉe u kaj do haves la formon (2.21) kun pure imaginara k. La maspunkto situas ankaŭ sur la akso (2.22) de $c'$ kaj do estas la intersekco de la aksoj de c kaj $c'$.

La movekvacio de ĉiu maspunkto devas nun doni la akcelan motoron $c'$ de tiu maspunkto kiel funkcion de lapozicioj u kaj de la rapidmotoroj c de ĉiuj maspunktoj en ĉiu momento $\tau$. Adekvata konstruo de la gravita movekvacio devas obei la sekvantajn ok postulatojn (komparu la aksiomojn en [16] kaj [19] ):

$1^o$. Lorentza nevarieco. La unua Lorentza nevarieco validas por ĉiuj ekvacioj inter motoroj. Do la pozicivektoroj u devas esti uzataj nur pere de iliaj motoraj kvocientoj, ekz. $u_1u_2^{-1} = u_1\bar{u}_2$. La dua Lorentza nevarieco validas, kiam $c'$ dependas de la rapidmotoroj c nur pere de la diferencoj (5.5), kie $u' = cu$.

$2^o$. La ekvivalenta principo de Galilei aŭ la egaleco de la inercia kaj peza masoj. Tio signifas, ke la movo de maspunkto ne dependas de ĝia maso. Aŭ, ke $c'$ estas funkcio de ĉiuj c kaj de ĉiuj u, sed dependes nur de masoj de la aliaj maspunktoj.

La signifo de la vorto "maso" estas ankaŭ problemo. Temas pri pozitiva skalaro, eble funkcio de $\tau$, apartenanta al ĉiu maspunkto kaj mezuranta la gravitan influon de tiu maspunkto sur aliaj maspunktoj. En la tradicia mekaniko de la speciala teorio de relativeco la propra maso $m_o$ estas la sola skalaro apartenanta al maspunkto. Sed en la motora mekaniko ni havas ankaŭ la movenergion $m_o(1 - c^2)^{-1/2}$ de la maspunkto rilate la lokan kosmologian substraton. Tiu energio estas pozitiva ankaŭ por la lumo, kies $m_0$ estas 0.

$3^o$. Lineara superpozicio. Tiu estas la Newtona principo de la sendependa influo de malsamaj maspunktoj. La c de ĉiu maspunkto do estu funkcio de la c kaj u de tiu maspunkto kaj lineara homogena funkcio de la motoro mf, kie m trakuras la masojn de la aliaj maspunktoj kaj la motoro f dependas nur de la c kaj u de la du maspunktoj apartenantaj al la c′ kaj m konsiderataj.

$4^o$. Ago kaj reago. La Newtona principo pri ago kaj reago povas esti reenkondukata, se la motoro f ŝanĝas antaŭsignon, kiam la du maspunktoj estas interŝanĝataj.

$5^o$. Konservo de la spinora reguligo. La aldona kondiĉo (3.9) estas aŭtomate konservata, se c′ de ĉiu maspunkto estas senspura kaj hermita ĉe la pozicio u de tiu maspunkto.

$6^o$. La lima rapido de lumo. La rapido de maspunkto ne rajtas superi la luman limon $c^2 = 1$. Tio signifas, ke c′ devas dependi de c de la sama maspunkto tiel, ke $(c^2)' = cc' + c'c$ fariĝas 0, kiam $c^2$ fariĝas 1.

$7^o$. Universala valideco. La funkcio c′ devas esti tia, ke ĝi en ĉiuj eblaj cirkonstancoj unusence kaj sen singularaĵoj determinas la movon de maspunktoj kaj tiun de lumpartikloj.

$8^o$. Empiria vereco. La teorio devas doni la nun konatan empirian materialon inter la limoj de la observa necerteco. Do el la teorio devas sekvi preskaŭ la samaj astrodinamikaj movoj kiel el la ĝenerala teorio de relativeco.

Ĉi tiuj ok postulatoj ŝajnas kontraŭdiraj. Ekz. la postulato $1^o$ de sendenpendeco de la forto de aldona translacio ŝajnas kontraŭdiri la postulaton $6^o$ de la lima rapido. La eblecoj de dinamika movekvacio de motora mekaniko kontentiganta ĉi tiujn ok postulatojn estos pritraktataj en alia artikolo, verŝajne en la revuo "Celestial Mechanics".

L i t e r a t u r o c i t a t a

[1] Kustaanheimo, P.E.: Some remarks on the general relativity theory of Birkhoff. - Soc.Sci.Fenn.Comm.Phys.Math. 17, 11. - Publ.Astronom- Obs. Helsinki 45. - 1955

[2] Kustaanheimo, P.E.: Notas sobre la teoria de la relatividad general de Birkhoff. - Publ.Univ.Nac.Autón. de México, - 1956.

[3] Kustaanheimo, P.E.: On the use of a gravitational vector potential in the relativity of Birkhoff. - Annal.Acad.Sci.Fenn. A,I, 228.- Publ.Astronom.Obs.Helsinki 49. - 1957

[4] Kustaanheimo, P.E.: Scalar field theory as a theory of gravitation. - Soc.Sci.Fenn.Comm.Phys.Math.21,3. - Publ.Astronom.Obs.Helsinki 57. - 1958

[5] Kustaanheimo, P.E.: On a unified field theory based on the special theory of relativity. - Soc.Sci.Fenn.Comm.Phis.Math. 21,3. - Publ. Astronom.Obs.Helsinki 58. - 1958

[6] Kustaanheimo, P.E.: Ueber die Spinorringalgebra. - Internat.Congr. Math. Stockholm. Short Comm. 192. - Publ.Astronom.Obs.Helsinki.93.- 1962

[7] Kustaanheimo, P.E., kaj Lehti, R.A.: Ueber das Einkörperproblem in den verschiedenen Theorien der Gravitation. - Soc.Sci.Fenn.Comm. Phys.Mat. 28,2 - Publ.Astronom.Obs.Helsinki 98. - 1963

[8] Kustaanheimo, P.E.: Spinor regularization of Kepler motion. - Annal. Univ.Turkuens. A, I, 73. - Publ.Astronom.Obs.Helsinki 102. - 1964

[9] Kustaanheimo, P.E.: Relativistic spinor regularization of the Kepler motion. - Soc.Sci.Fenn.Comm.Phys.Mat. 30,9. - Publ.Astronom.Obs. Helsinki 103.- 1964

[10] Kustaanheimo, P.E. kaj Nuotio, V.S.: Spinor ring algebra I.- Publ. Astronom.Obs.Helsinki 109. - 1965

[11] Kustaanheimo, P.E.: Die Spinordarstellung der energetischen Identitäten der Keplerbewegung. - Math.Forschungsinst.Oberwolfach, Berichte 1,333. - Publ.Astronom.Obs.Helsinki 111. - 1965

[12] Kustaanheimo, P.E., kaj Stiefel, E.: Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization. - Journal reine u. angew.Math. 218, 204. - Publ.Astronom.Obs.Helsinki 110. - 1965

[13] Kustaanheimo, P.E.: Linear theory of gravitation without potential.- Soc.Sci.Fenn.Comm.Phys.Math. 32,10. - Publ.Astronom.Obs. Helsinki 112. - 1966

[14] Kustaanheimo, P.E.: Route dependence of the gravitational red shift. - Phys.Letters 23,75. - Publ.Astronom.Obs.Helsinki 118. - 1966

[15] Kustaanheimo, P.E., kaj Nuotio, V.S.: Spinor ring algebra of the complex 2 x 2 matrices. - Publ.Astronom.Obs.Helsinki 127.- 1967

[16] Kustaanheimo, P.E., kaj Nuotio, V.S.: Relativistic theories of gravitation: One-body problem. - Publ.Astronom.Obs.Helsinki 128.- 1967

[17] Kustaanheimo, P.E.: Relativistic spinor regularization of the Kepler motion and relativistic motors. - Annal.Acad.Sci.Fenn. A,VI, 250. - Publ.Astronom.Obs.Helsinki 130. - 1967

[18] Kustaanheimo, P.E.: Darstellung des klassischen hyperbolischen Raumes durch relativistische Motoren. - Abh.Mat.Sem.Univ.Hamburg 32,89. - Publ.Astronom.Obs.Helsinki 140. - 1968

[19] Kustaanheimo, P.E., kaj Nuotio, V.S.: Relativistic theories of gravitation. - Nature 220, 696. - Publ.Astronom.Obs.Helsinki 141. - 1968

[20] Kustaanheimo, P.E., kaj Nuotio, V.S.: Spinor ring algebra II: Algebra of relativistic motors. - Publ.Astronom.Obs.Helsinki 142. - 1968

Abstract

BASIS CONCEPTS OF THE KINEMATICS OF MOTOR MECHANICS
(P. Kustaanheimo, Helsinki, Finnlando)

The mechanics of the special theory of relativity is formulated in a new way inspired by the structure of the Spinor Ring Algebra [6], [8], [10], [15], [20]. This mechanics differs only slightly from the ordinary in its empirical consequences; however, it makes possible the re-introduction of many Newtonian concepts. The electromagnetic phenomena and observations are assumed to occur in a Minkowski space-time (3.1) as asual, but an idealized model of the expanding universe, namely the interior of a definite light cone (3.2) with a definite vertex as an absolute zero point, is assumed to be the inertial frame, according to the principle of Mach. At each point of this light cone there is a definite cosmological time (3.3), namely the distance from the absolute zero point, and this time, or its logarithm (3.13), is the common independent variable in the equations of motion. The motions of both mass points and rigid bodies (4.1) are describes in the same way by means of a velocity motor (3.14), (4.2), according to the methods of the relativistic spinor regularization [9], [17]. The uniform motion (3.17) of a mass point in this mechanics is an equiangular spiral that deviates with an unobservable amount from the straight lines of the Minkowski space-time and exactly coincides with a straight line if the velocity of the mass point relative to the inertial frame is zero (cosmological substratum) or the velocity of light. The mutual motions of the mass points in a system are independent of the velocity of the whole system relative to the inertial frame if the forces (i.e. the acceleration motors) are functions of certain motor quotients (5.5) of velocity and postition fourvectors. The laws of force, necessarily obeying the eight postulates of Chapter 6, will be discussed in another paper.