SCIENCA REVUO de Internacia Scienca Asocio Esperantista BEOGRAD, Jugoslavio	El Vol. 22 n-ro 5-6/91-92 25.12.1971.

PRI LA EKVACIOJ DE LA INTERNA STELSTRUKTURO

(A. Heck, Jalhay, Belgio)*

En artikolo aperinta en Acta Astronomica Polonica /1963/, W. Dziembowski montris ke la ekvacioj de la interna stelstrukturo de deformataj steloj samas tiujn de normalaj steloj. Nia celo estas demonstri ke, se tio estas vera por la plimulto de ekvacioj, ni devas tamen aldoni termojn en la ekvacion de la hidrodinamika ekvilibro.

Laŭ Kopal /1959/ Dziembowski prave supozas ke la egalpotencialaj surfacoj de la stelo estas karakterizataj per

$$r = \bar{r}\ /1+\sum_i Y_i\ /$$

kie r estas la distanco al la stela pezocentro,

$\bar{r}$ estas la meza distanco de la egalpotenciala surfaco al la stela pezocentro,

Y_i estas la surfacaj harmoniaj funkcioj rilate al la stela pezocentro kies dua kaj pli altaj potencoj estas neglekteblaj.

Ekvacio de la hidrodinamika ekvilibro

Se $dm/\bar{r}/$ estas maso situanta inter la egalpotencialaj surfacoj kies meza distanco al la pezocentro estas respektive $\bar{r}$ kaj $\bar{r}+d\bar{r}$, ni havas:

$$dm(\bar{r}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho\,(\bar{r})\ r^2(\bar{r},\theta,\phi)\ \frac{\partial r}{\partial \bar{r}}\ \sin\theta\ d\theta\, d\phi\, d\bar{r}$$

---

*) Rue du Chéra, 49, 4000 LIEGE

kie ρ estas denseco. Rimarkante ke

$$r^2 \frac{\partial r}{\partial \bar{r}} = (1 + 3 \sum_i Y_i + \sum_i \frac{\partial Y_i}{\partial \bar{r}} \bar{r}) r^{-2}$$

kaj ke $\int Y_i \, d\omega = 0$,

ni konkludas kun Dziembowski ke

$$dm(\bar{r}) = 4\pi \bar{r}^{2} \rho(\bar{r}) \, d\bar{r}$$

Sekve

$$m(\bar{r}) = \int_0^{\bar{r}} \rho(s) \, 4\pi \, s^2 \, ds.$$

Aliparte, la ĝenerala formo de la ekvacio de la hidrodinamika ekvilibro estas

$$\text{grad } p = \rho \text{ grad } V$$

kie

p estas premo kaj

V estas evaluenda potencialo de la gravitaj kaj centrifugaj fortoj.

Ni havas en iu punkto $(\bar{r}, \theta; \phi)$ de stelo:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

kie

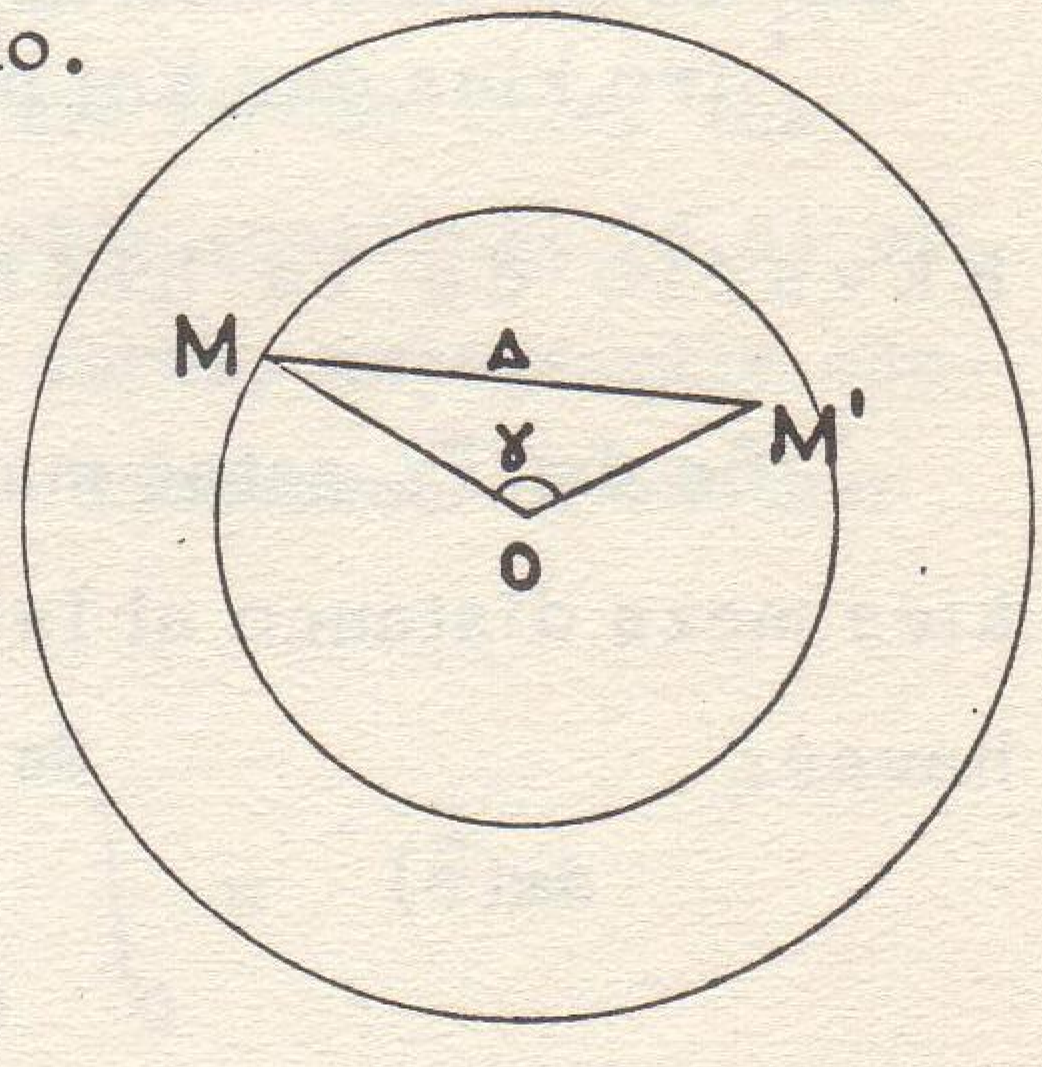
V_1 estas potencialo kaŭzita de la maso situanta interne de la egalpotenciala surfaco $\bar{r}$,

V_2 estas potencialo kaŭzita de la maso situanta inter la egalpotenciala surfaco $\bar{r}$ kaj la stelsurfaco,

V_3 estas "deformpotencialo" reprezentanta ekz. deformaĵojn kaŭzitaj per stelrotacio aŭ per kunula stelo.

Ni havas respektive:

$$V_1 = G \int \frac{dm'}{\Delta}$$



DES 1

kie G estas la universala gravita konstanto,

$$dm' = \rho(r') \, r'^2 \sin\theta' \, d\theta' \, d\phi'$$

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2r\, r' \cos\gamma$$

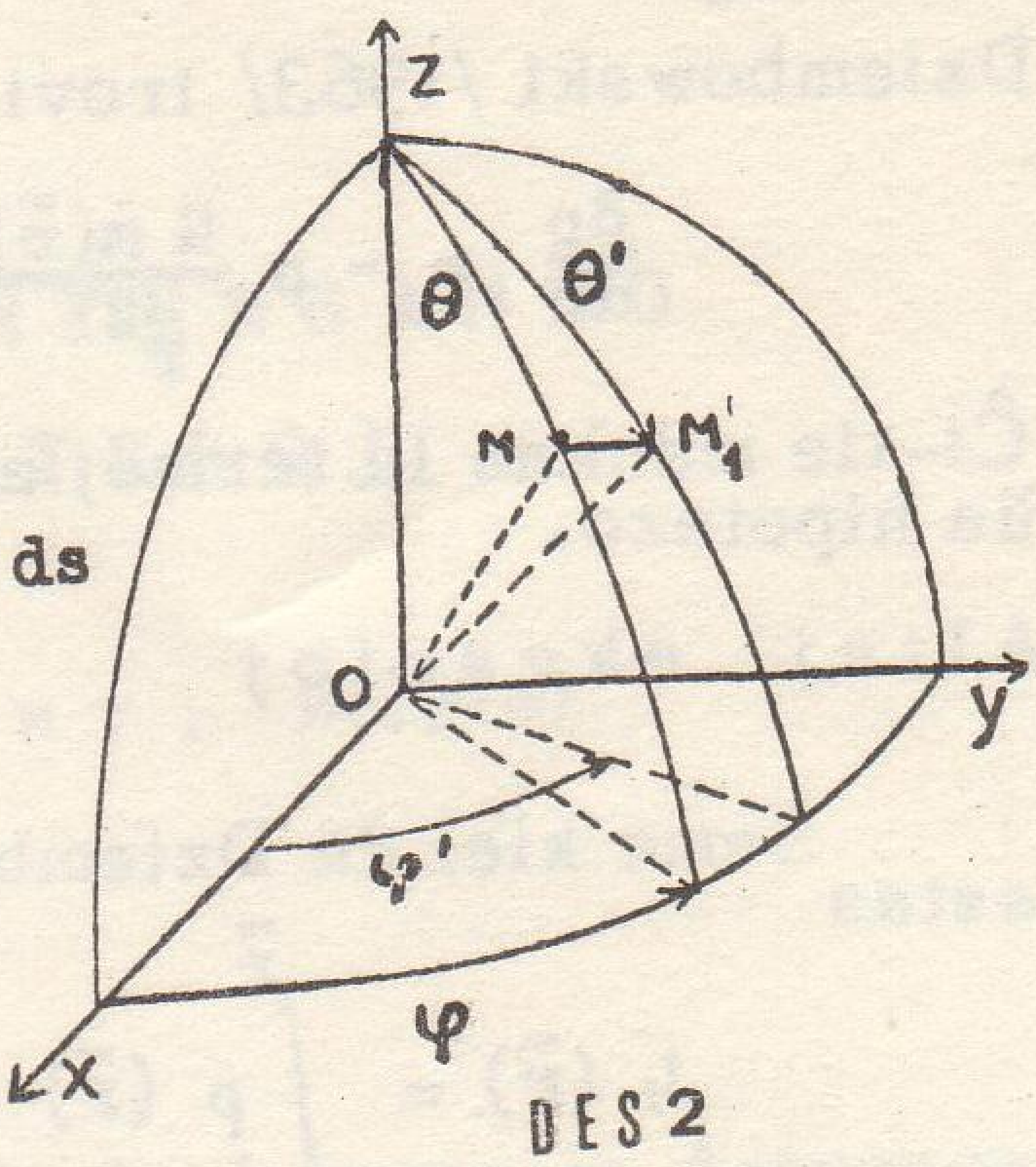
$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi - \phi')$$

Sekve

$$V_1 = \sum_{n=0}^{\infty} V_{1n} \, r^{-n-1}$$

kie $V_{1n} = G \int_0^{r}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r'^{(2+n)} \; P_n(\cos\gamma)\, dr' \; \sin\theta' \; d\theta' \; d\phi'$

kie P_n estas Legendre-polinomo. Anstataŭante r per ĝia meza valoro, sekvas



DES 2

$$V_1 = (1 - \sum_i Y_i)\ \frac{4\pi G}{\bar{r}} \int_0^{\bar{r}} \rho(s)\, s^2\, ds + \sum_{n=2}^{\infty} \bar{r}^{-n-1} \frac{4\pi G}{2n+1} \int_0^{\bar{r}} \rho(s) \frac{\partial}{\partial s}(s^{n+3}\, Y_n)\, ds$$

Same oni havas

$$V_2 = \sum_{n=0}^{\infty} V_{2n}\, r^n$$

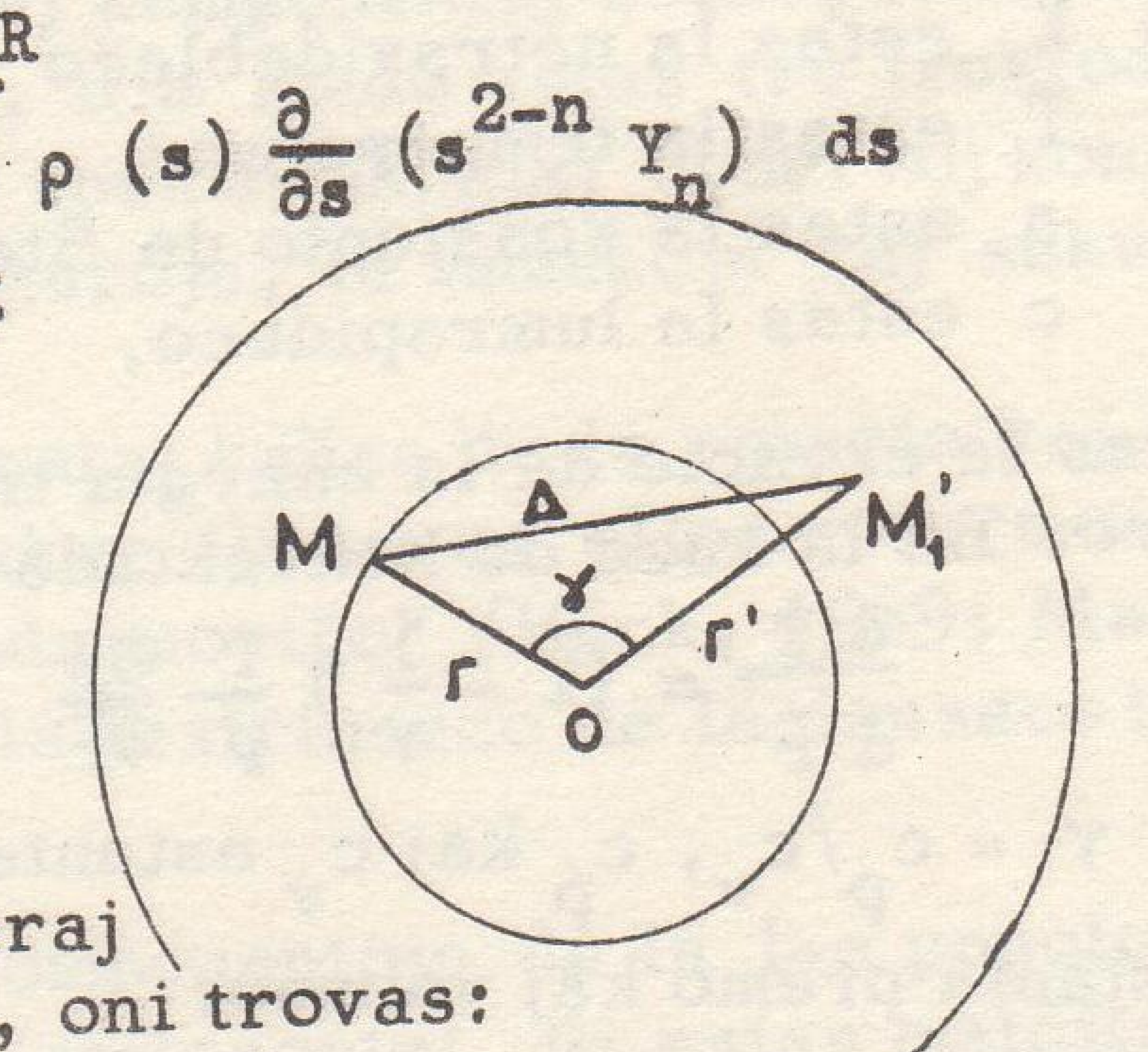
kun

$$V_{2n} = G \int_r^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho(r')\, r'^{1-n}\, P_n(\cos\gamma)\, dr' \; \sin\theta' \; d\theta' \; d\phi'$$

kaj

$$V_2 = 4\pi G \int_{\bar{r}}^R \rho(s)\, s\, ds + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi G}{2n+1}\, \bar{r}^n \int_{\bar{r}}^R \rho(s) \frac{\partial}{\partial s}(s^{2-n}\, Y_n)\, ds$$

Ni supozas ke le deformpotencialo havas la jenan formon:



DES 3

$$V_3 = \sum_{ij} C_{ij}\, r^j\, P_{ij}(\theta, \phi).$$

Se ni skribas la ekvacion /2/ en sferaj koordinatoj, konsiderante ankaŭ /1/, oni trovas:

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{r}} = \rho \frac{\partial V}{\partial \bar{r}}$$

$$= -(1 - \sum_i Y_i)\, \frac{Gm(\bar{r})}{\bar{r}^2}\, \rho(\bar{r}) - \sum_i Y_i\, 4\pi G\, \rho^2(\bar{r})\, \bar{r}$$

$$- \sum_i \frac{dY_i}{d\bar{r}}\, \rho(\bar{r})\, \frac{4\pi G}{\bar{r}} \int_0^{\bar{r}} \rho(s)\, s^2 ds + \rho \sum_{ij} C_{ij}\, j\, \bar{r}^{-n-1}\, P_{ij}(\theta,\phi)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \rho\, \frac{n 4\pi G}{2n+1}\, \bar{r}^{n-1} \int_{\bar{r}}^{R} \rho(s) \frac{\partial}{\partial s}(s^{2-n}\, Y_n)\, ds$$

$$- \frac{4\pi G}{3}\, \rho^2(\bar{r})\, \bar{r}^2 \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{r}} - \frac{4\pi G}{3}\, \rho^2(\bar{r})\, \bar{r}\, Y_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 4\pi G\, \rho^2(\bar{r})\, Y_n$$

kaj

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \sum_{ij} C_{ij}\, \bar{r}^j \frac{\partial}{\partial \theta} P_{ij}(\theta,\phi) \qquad \frac{\partial p}{\partial \phi} = \sum_{ij} C_{ij}\, \bar{r}^j \frac{\partial}{\partial \phi} P_{ij}(\theta,\phi)$$

Dziembowski /1963/ trovis nur

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{G\, m(\bar{r})}{\bar{r}^2}$$

Ĉi-tie mankas la termoj entenantaj la Y_i, ne-neglekteblajn laŭ la antaŭa hipotezo.

Aliaj ekvacioj

Same kiel ĉe Dziembowski, la ekvacioj de la termika ekvilibro estas

$$L(\bar{r}) = \int_0^{\bar{r}} \rho(\bar{r})\, \varepsilon(\bar{r})\, 4\pi \bar{r}^2 \, d\bar{r}$$

kie L/r/ estas la produktata energio inter la egalpotencialaj surfacoj kies meza distanco al la pezocentro estas respektive $\bar{r}, \bar{r}+d\bar{r}$,

$\varepsilon(\bar{r})$ estas la energia produktprocento.

Aliparte

$$\frac{dT}{d\bar{r}} = -\frac{3}{4ac} \frac{\chi \rho}{T^3} \frac{L(\bar{r})}{4\pi \bar{r}^2}$$

kie χ estas la netravidebleco

T estas la temperaturo,

a estas la konstanto de Stefan-Boltzmann /$=7{,}55.10^{-15}$/,

c estas la lumrapideco,

estas la ekvacio de la energia transporto en la kazo de radiada ekvilibro. En la kazo de konvektada regiono ni havas

$$\frac{dT}{d\bar{r}} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial \bar{r}}$$

kie $\gamma = c_p/c_v$, c_p kaj c_v estante la specifaj varmecoj respektive je konstanta premo kaj volumo.

Konkludo

Oni vidas do ke la ekvacioj uzataj por la konstruado de modeloj de normalaj steloj ne konvenas kiam temas pri deformataj steloj. En la ekvacio de la hidrodinamika ekvilibro aldoniĝas termoj entenantaj Y_i asociatajn al la deformiĝoj.Tio estas grava ekzemple por la duoblaj steloj kie komponantoj estas deformataj per rotacio kaj per la gravitforto de la kunula stelo.

Bibliografio

Dziembowski W. 1963, A.A. 13, 157. On the equation of Internal Constitution of Components in Close Binaries

Kopal Z. 1959, Close Binary Systems, N.Y., J.Wiley &Sons.