Kelkaj pruvoj de la teoremo pri la segmentoj de la dusekcantoj en trilatero

Jan Górowski, Maciej Klakla, Adam Łomnicki

La teoremo, ke triangulo havanta du egalajn segmentojn de dusekcantoj estas isocela, estas pruvata. Entute sep individuaj pruvoj – kaj simplaj kaj malsimplaj – estas demonstrataj.

Unue ni precizigu la nociojn: *dusekcanto de plurlatero, segmento de la dusekcanto de plurlatero*. Dusekcanton de plurlatero oni povas difini jene: duonrekto, kies origino estas vertico de tiu plurlatero kaj kiu dusekcas la angulon de tiu plurlatero. Por simpligi la lingvaĵon en ĉi tiu artikolo ni enkondukas la nocion *segmento de la dusekcanto* de trilatero: ĝi estu la komuna parto de trilatero kaj de la dusekcanto de tiu trilatero. Sur la bildo 1 la strekoj AK kaj BL estas la segmentoj de la dusekcantoj de la trilatero ABC.

Enkonduko

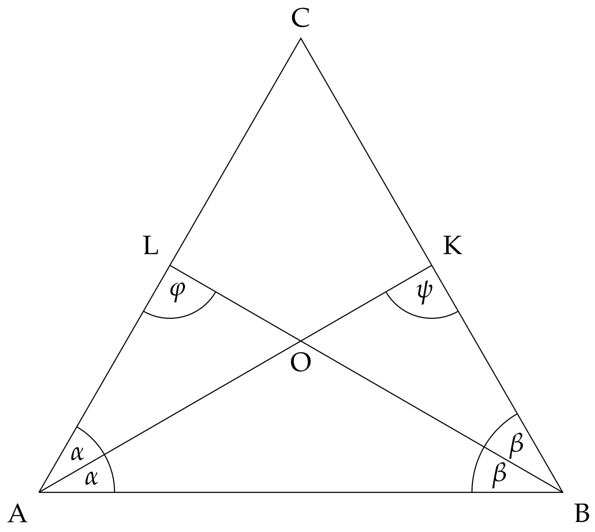
Kompreneble en izocela triangulo la segmentoj de la dusekcantoj de ĝiaj egalaj (en la senco: kongruaj) anguloj, estas egalaj (en la senco: kongruaj). Interesa problemo ekestas, kiam ni demandas: ĉu nur izocela triangulo havas tiun econ? Ĉu tiu eco plene karakterizas izocelan triangulon? En la artikolo *Matematikaj taskoj por konkludi* [2] en Scienca Revuo ni tuŝis jam ĉi tiun problemon. Tie ni donis la jesan respondon kaj unu pruvon. Sube ni prezentos kelkajn originalajn pruvojn de la teoremo.

Teoremo 1. *Se la segmentoj AK kaj BL de la dusekcantoj en triangulo ABC estas egalaj, la triangulo ABC estas izocela.*

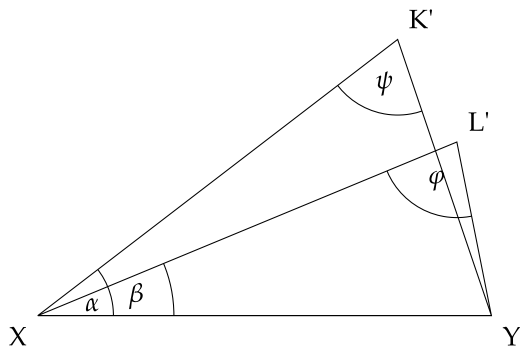
Interesa por matematikistoj kaj speciale por didaktikistoj de matematiko estas tio, ke ne estas facile pruvi tiun teoremon kaj ankoraŭ pli miriga estas tio, ke oni povas trovi pli ol 10 diversajn pruvojn. Ni prezentos kelkajn originalajn pruvojn. En la procezo de lernado-instruado de matematiko oni povas eluzi tiujn demonstrojn por instrui atentan legadon de matematikaj tekstoj, kompletigadon de tiuj tekstoj kaj priskribadon de la strategioj de rezonado.

Pruvo 1

Ni fiksu la simbolojn kiel sur bildo 1. Laŭ premiso $|AK| = |BL|$ ni supozu, ke $\alpha > \beta$. De tio sekvas $|OB| > |OA|$. La trianguloj XYK', XYL' estas kongruaj (konvene) al la trianguloj ABK, ABL en bildo 2, $|XY| = |AB|$.



Bildo 1: Difino de la simboloj



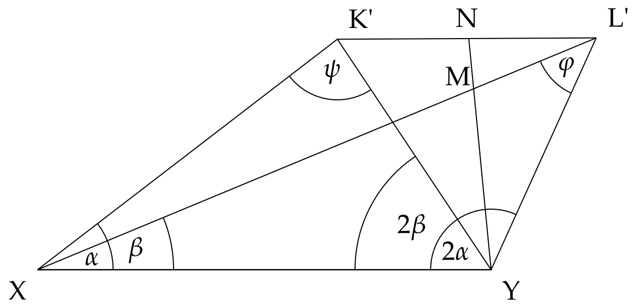
Bildo 2: Nekongrueco de $XK'Y$ kaj $XL'Y$

Tiam $|XL'| = |XK'| = |AK|$. Kaj la triangulo $XK'L'$ estas izocela, do $\psi < \frac{\pi}{2}$. Konsiderante la triangulojn AOL kaj BOK ni rimarkas, ke $\varphi < \psi$. La punkto O estas en egala distanco al la lateroj CA kaj CB, ĉar ĝi estas komuna punkto de la dusekcantoj BL kaj AK. Sed $0 < \varphi < \psi < \frac{\pi}{2}$, do $|OK| < |OL|$. Laŭ premiso $|AK| = |BL|$, do $|AO| = |AK| - |OK| = |BL| - |OK| > |BL| - |OL| = |BO|$. Ni ricevis antinomion. La triangulo ABC estas do izocela.

Pruvo 2

Ni fiksu la simbolojn kiel sur bildoj 1 kaj 3. Laŭ premiso: $|AK| = |BL|$.

Ni supozu, ke $\alpha > \beta$. La trianguloj XYK', XYL' kongruas (konvene) al la trianguloj ABK, ABL en bildo 3. Ni premisu, ke la streko YN estas segmento de dusekcanto de la angulo $K'YL'$ en la triangulo $K'L'Y$. Pro tio, ke $|\sphericalangle XYL'| = 2\alpha$, $|\sphericalangle XYK'| = 2\beta$, oni ricevas $|\sphericalangle K'YM| = \alpha - \beta = |\sphericalangle K'XM|$. Tial ekzistas cirklo ĉirkaŭskribita je la kvarlatero $XYMK'$.



Bildo 3: Pruvo 2

Sed $|\sphericalangle XYM| = |\sphericalangle XYK'| + |\sphericalangle K'YM| = 2\beta + \alpha - \beta = \alpha + \beta$, do $|\sphericalangle XK'M| = \pi - (\alpha + \beta)$. Evidente $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Tial laŭvice:

$$|\sphericalangle XK'M| > \frac{\pi}{2}],$$

$$|\sphericalangle XK'L'| > |\sphericalangle XK'M| > \frac{\pi}{2},$$

La sumo de anguloj de la triangulo $XK'L'$ superas π. Ni ricevis antinomion.

La triangulo ABC estas do izocela.

Pruvo 3

Ni fiksu la simbolojn kiel sur bildoj 1 kaj 3. Laŭ premiso: $|AK| = |BL|$.

Ni supozu, ke $\alpha > \beta$. De tio sekvas $|\sphericalangle K'YL'| = 2\alpha - 2\beta$. Ni supozu, ke la duonrekto YN estas dusekcanto de la angulo $K'YL'$. Sekve $|\sphericalangle XYM| = \alpha + \beta$ kaj la triangulo XYM havas la angulojn kongruajn al la anguloj de la triangulo BOK. De tio $|\sphericalangle XMY| = \psi$. Laŭ la teoremo de sinusoj (por la trianguloj XYM kaj XYK') ni ricevas

$$\frac{|XY|}{\sin\psi} = \frac{|XM|}{\sin(\alpha+\beta)},$$

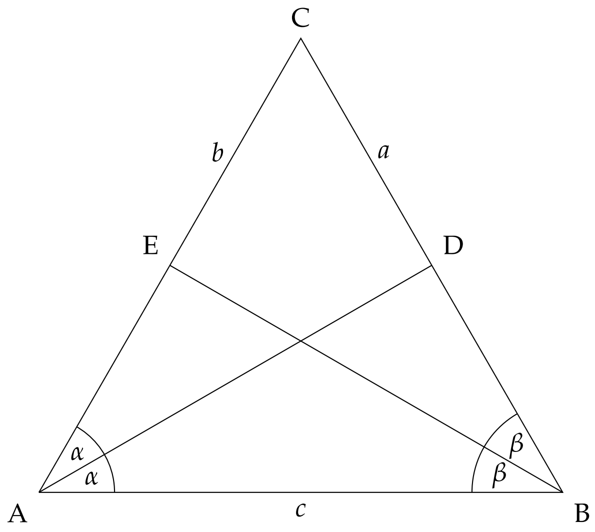
$$\frac{|XY|}{\sin\psi} = \frac{|XK'|}{\sin 2\beta}.$$

Sekve

$$\frac{|XM|}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{|XK'|}{\sin 2\beta}.$$

Pro tio, ke $|XM| < |XL'| = |XK'|$, do $\sin(\alpha+\beta) < \sin 2\beta$. Evidente $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ kaj $2\beta < \frac{\pi}{2}$. Konklude $\alpha + \beta < 2\beta$, $\alpha < \beta$. Ni ricevis antinomion.

La triangulo ABC estas do izocela.



Bildo 4: Pruvo 4

Pruvo 4

Ni fiksu la simbolojn kiel sur la bildo 4 kaj krom tion $|AD| = d$, $|BE| = d$. Laŭ premiso: $|AD| = |BE|$. Suficâs demonstri, ke $2\alpha = 2\beta$.

Laŭ la teoremo de sinusoj (aplikita al la triangulo ABD) ni ricevas:

$$\frac{d}{\sin 2\beta} = \frac{c}{\sin |\sphericalangle ADB|},$$

kaj pro tio, ke $|\sphericalangle ADB| = \pi - 2\beta - \alpha$, estas

$$\frac{d}{\sin 2\beta} = \frac{c}{\sin (2\beta + \alpha)}.$$

Analoge (rigardante la triangulon ABE) ni ricevas

$$\frac{d}{\sin 2\alpha} = \frac{c}{\sin(2\alpha + \beta)}.$$

Sekvas

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha + \beta)} = \frac{\sin 2\beta}{\sin(2\beta + \alpha)}$$

kaj laŭvice

$$\sin 2\alpha \sin(2\beta + \alpha) = \sin 2\beta \sin(2\alpha + \beta),$$

$$-2 \sin 2\alpha \sin(2\beta + \alpha) = -2 \sin 2\beta \sin(2\alpha + \beta),$$

$$\cos(3\alpha + 2\beta) - \cos(\alpha - 2\beta) = \cos(3\beta + 2\alpha) - \cos(\beta - 2\alpha),$$

$$\cos(3\alpha + 2\beta) - \cos(3\beta + 2\alpha) = \cos(\alpha - 2\beta) - \cos(\beta - 2\alpha),$$

$$-2\sin\frac{5\alpha+5\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = -2\sin\frac{-\alpha-\beta}{2}\sin\frac{3\alpha-3\beta}{2}.$$

De tio, utiligante la formulojn:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

$$\sin 5x = \sin^5 x - 10\sin^3 x\cos^2 x + 5\sin x\cos^4 x$$

ni ricevas

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cdot\left(\sin\frac{4\alpha+\beta}{2} - 10\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 5\cos^4\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$
$$= -\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Ni supozu, ke $\alpha \neq \beta$. Tiam

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$$

kaj laŭvice

$$\sin^4\frac{\alpha+\beta}{2} - 10\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 5\cos^4\frac{\alpha+\beta}{2} =$$
$$= 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 3,$$
$$5\left(\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - 4\sin^4\frac{\alpha+\beta}{2} = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 3,$$
$$5\cos^2(\alpha+\beta) + 3 = 4\left(\sin^4\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

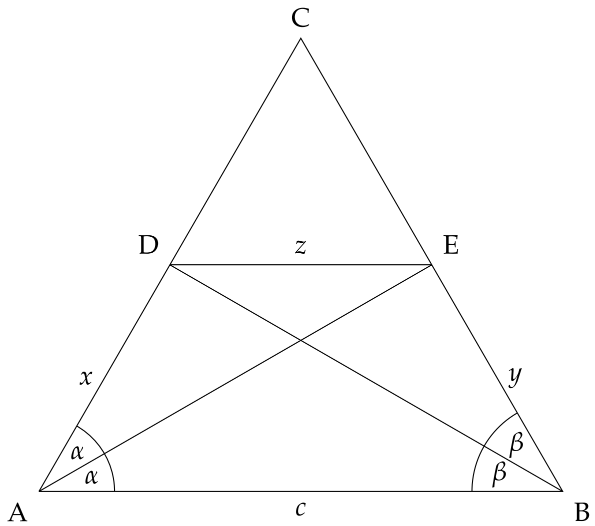
Pro tio, ke $0 < 2\alpha + 2\beta < \pi$, do $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$,

$$0 < \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{4},\ |\frac{\alpha-\beta}{2}| < \frac{\pi}{4}$$

kaj $5\cos^2(\alpha+\beta) + 3 > 3$ kaj

$$4\left(\sin^4\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) < 4\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = 3.$$

Ni ricevis antinomion. Fine $\alpha = \beta$, $2\alpha = 2\beta$, $a = b$.



Bildo 5: Pruvo 5

Pruvo 5

Ni fiksu la simbolojn kiel sur la bildo 5, $|AE| = y$, $|ED| = z$, $|BD| = x$ kaj krom tion $|AD| = d$, $|BE| = d$. Laŭ la teoremo de kosinusoj ni ricevas:

$$c^2 = d^2 + x^2 - 2dx\cos(\pi - 2\beta - \alpha) = d^2 + x^2 + 2dx\cos(2\beta + \alpha),$$
$$c^2 = d^2 + y^2 - 2dy\cos(\pi - 2\alpha - \beta) = d^2 + y^2 + 2dy\cos(2\alpha + \beta),$$
$$z^2 = d^2 + x^2 - 2dx\cos\beta,$$
$$z^2 = d^2 + y^2 - 2dy\cos\alpha,$$
$$d^2 + x^2 + 2dx\cos(2\beta + \alpha) = d^2 + y^2 + 2dy\cos(2\alpha + \beta),$$
$$d^2 + x^2 - 2dx\cos\beta = d^2 + y^2 - 2dy\cos\alpha,$$
$$4dx(\cos(2\beta + \alpha) + \cos\beta) = 4dy(\cos(2\alpha + \beta) + \cos\alpha),$$
$$x\cos\frac{3\beta + \alpha}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2} = y\cos\frac{3\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Evidente

$$0 < \frac{\alpha + \beta}{2} < \frac{\pi}{4} \quad \text{kaj} \quad 0 < \frac{3\alpha + \beta}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{kaj} \quad 0 < \frac{3\beta + \alpha}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Ni demonstros, ke

$$\frac{3\alpha + \beta}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{kaj} \quad \frac{3\beta + \alpha}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Unue ni rimarku, ke

$$\frac{3\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} + \alpha < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi.$$

Analoge
$$\frac{3\beta+\alpha}{2} < \frac{3}{4}\pi.$$
Se ekzemple estus
$$\frac{\pi}{2} < \frac{3\alpha+\beta}{2} < \frac{3}{4}\pi \quad \text{kaj} \quad \frac{3\beta+\alpha}{2} \leq \frac{\pi}{2},$$
tiam la egaleco
$$x\cos\frac{3\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = y\cos\frac{3\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
ekvivalenta al egaleco
$$x\cos\frac{3\beta+\alpha}{2} = y\cos\frac{3\alpha+\beta}{2}$$
ne estus vera kaj
$$\frac{3\alpha+\beta}{2} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{kaj} \quad \frac{3\beta+\alpha}{2} \leq \frac{\pi}{2}.$$
se estus
$$\frac{3\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{kaj} \quad \frac{3\beta+\alpha}{2} = \frac{\pi}{2},$$
oni ricevus $\alpha+\beta=\pi$. Kompreneble la kazo
$$\frac{3\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{kaj} \quad \frac{3\beta+\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{aŭ} \quad \frac{3\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{kaj} \quad \frac{3\beta+\alpha}{2} = \frac{\pi}{2},$$
ne estas vera, ĉar ĝi kontraŭstaras al
$$x\cos\frac{3\beta+\alpha}{2} = y\cos\frac{3\alpha+\beta}{2}.$$
Sekvas
$$0 < \frac{3\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{kaj} \quad 0 < \frac{3\beta+\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}.$$
Se estus $\alpha > \beta$, oni ricevus $x > y$ kaj
$$\frac{3\alpha+\beta}{2} > \frac{3\beta+\alpha}{2}.$$
Sekvas
$$\cos\frac{3\alpha+\beta}{2} < \cos\frac{3\beta+\alpha}{2} \quad \text{kaj} \quad y\cos\frac{3\alpha+\beta}{2} < x\cos\frac{3\beta+\alpha}{2}.$$
Ni ricevis antinomion kun
$$x\cos\frac{3\beta+\alpha}{2} = y\cos\frac{3\alpha+\beta}{2}.$$
Analoge ne estas ebla $\alpha < \beta$. Konklude $\alpha = \beta$.

Pruvo 6

Ni fiksu la simbolojn, kiel sur la bildo 4, kaj krom tio la simbolo $P_{\triangle XYZ}$ signifu la areon de la triangulo XYZ. Laŭ premisoj: $|AD| = |BE|$.

Ni supozu, ke $2\alpha > 2\beta$. Tiam $\sin\alpha > \sin\beta$ kaj pro tio

$$P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot dc \cdot \sin\alpha, \quad P_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot dc \cdot \sin\beta$$

do $P_{\triangle ABD} > P_{\triangle ABE}$. Sekve $P_{\triangle ADC} < P_{\triangle BEC}$. Ĉar

$$P_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot bd \cdot \sin\alpha \quad \text{kaj} \quad P_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} \cdot da \cdot \sin\beta$$

ni ricevas

$$\frac{1}{2} \cdot bd \cdot \sin\alpha < \frac{1}{2} \cdot \sin\beta, \quad \frac{b}{\sin\beta} < \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Pro tio, ke $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, do $\cos\beta > \cos\alpha > 0$ kaj

$$0 < \frac{1}{2\cos\beta} < \frac{1}{2\cos\alpha}.$$

Sed

$$\frac{b}{\sin\beta} < \frac{a}{\sin\alpha},$$

do

$$\frac{b}{2\sin\beta\cos\beta} < \frac{a}{2\sin\alpha\cos\alpha}, \quad \frac{b}{\sin 2\beta} < \frac{a}{\sin 2\alpha}.$$

Ni ricevis antinomion. Analoge, la supozo $2\beta > 2\alpha$ gvidas al antinomio. Fine do $2\beta = 2\alpha$, $a = b$.

Pruvo 7

Ni fiksu la simbolojn, kiel sur la bildo 1. Laŭ premisoj $|AD| = |BE|$. Evidente $|AD| = \frac{2bc}{b+c}\cos\alpha$, $|BE| = \frac{2ac}{a+c}\cos\beta$.

Ni supozu, ke $a > b$. Sekve $\alpha > \beta$ kaj $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Plue $\cos\beta > \cos\alpha$,

$$\frac{2bc}{b+c}\cos\alpha = \frac{2ac}{a+c}\cos\beta,$$

$$b \cdot (a+c)\cos\alpha = a \cdot (b+c)\cos\beta,$$

$$ab \cdot (\cos\alpha - \cos\beta) = ac \cdot \cos\beta - bc \cdot \cos\alpha.$$

La maldekstra parto de la lasta egaleco estas negativa, la dekstra estas pozitiva, ĉar $ac > bc$ kaj $\cos\beta > \cos\alpha > 0$.

Ni ricevis antinomion. Analoge oni povas demonstri, ke la supozo $a < b$ gvidas al antinomio. Konklude $a = b$.

Bibliografio

[1] F. Enriques kaj Amaldiç U. *Zasady gieometrji elementarnej*. Warszawa – Lwów, 1916.

[2] J. Górowski, M. Klakla kaj A Łomnicki. "Matematikaj taskoj por konkludi". En: *Scienca Revuo* 61.223 (4 2010), p. 207–212.

[3] J. Górowski, M. Klakla kaj A. Łomnicki. "O pewnej charakterystyce trójkątów równoramiennych i równobocznych". En: *Gradient* 1 (1997), 13—20.

[4] J. Górowski, M. Klakla kaj A. Łomnicki. "Trójkąt - niewyczerpane źródło problemów". En: *Matematyka* 6 (1997), 357–360.

[5] J. Górowski, M. Klakla kaj A. Łomnicki. "Zadania "na wymuszanie" jako środek matematycznej aktywności uczacych się". En: *Dydaktyka Matematyki* 26 (2004), 61–80.

[6] Z. Krygowska. "Jak uczyć dowodzenia twierdzeń". En: *Matematyka* (5), 264–275.

[7] W. Walsch. "Rola dowodzenia w matematycznym wykształceniu ogólnym". En: *Dydaktyka Matematyki* 6 (1986), 113–125.

Pri la aŭtoroj

Jan Górowski kaj Adam Łomnicki estas doktoroj de matematiko kaj laboras en la Pedagogia Universitato en Krakovo (Pollando). Ili ambaŭ verkis pli ol 80 sciencajn artikolojn kaj lernolibrojn. Adam Łomnicki estas esperantisto kaj instruisto de tiu lingvo.

Maciej Klakla, matematikisto, laboras kiel profesoro en la Pedagogia Universitato en Krakovo kaj verkis pli ol 130 sciencajn artikolojn kaj lernolibrojn.