Scienca Revuo Vol.46 (1995)(1) - 166

APLIKO DE SPLAJN – FUNKCIOJ : SIGNIFA METODO DE KOMPUTORA MATEMATIKO

D-ro Ivan L. Andronov [1]

Odesa Stata Universitato, katedro de astronomio, *park im. T.G. Ŝevĉenko, 270014 Odessa*, Ukrainio

root@astro.odessa.ua

Ni revuas diversaj flankoj de uzado de matematika aparato de splajn-funkcioj: interpolado, glatigado de tabele determinataj funkcioj; numera integralado de funkcioj kaj ĝiaj kvadratoj; komparo kun rezultoj de Fourier–a analizo. Novaj metodoj de serĉo de periodo de varia signalo kaj de restarigado de signalo influita per "aparata funkcio" estas proponitaj.

1 Enkonduko

Dum lasta tempo la sciencistoj el diversaj landoj tre interesiĝas pri tie ĉi nomataj splajn- *(spline)* funkcioj, aparte pri la "kubaj splajnoj" (*Ahlberg* k.a. 1967, *Kornejĉuk* 1984, *Marĉuk* 1980, *Zavjalov* k.a. 1980 kaj aliaj monografioj). Uzado de tiaj ĉi funkcioj estas tre efektiva kaj havas kelkajn avantaĝojn kompare kun la aliaj metodoj.

En tiu ĉi artikolo ni mallonge diskutas kelkajn plej uzatajn aplikojn de la metodo. Post difino de splajnoj (sekcio 2) ni priskribos metodon de glatigo de pereksperimente mezuritaj valoroj de la funkcio (sekcio 3), de komputora integralado funkcioj (sekcio 4) kaj ĝiaj kvadratoj (sekcio 5). En sekcio 7 ni diskutas *Fourier* – spektron de kubaj splajn–funkcioj kaj komparas splajnajn kaj trigonometriajn aproksimaĵojn. Bonaj interpolaj proprecoj de splajnoj povus esti uzataj por la restarigado de funkcioj tiel, ke

[1] **Internacia Scienca Asocio Esperantista**

Scienca Revuo Vol. 46 (1995)(1) – 166

oni aplikas valorojn influitajn per la mezurilo (sekcio 6) kaj por la esploro de eblaj periodaĵoj de varia signalo (sekcio 8).

2 Polinomaj splajnoj

2.1 Difino

La polinoma splajno de potenco n kaj difekto k estas la funkcio, kia estus kalkulita per la formulo (vidu cititajn monografiojn):

$$S(x) = B_{j0} + B_{j1}\,h + ... + B_{jn}\,h^n, \qquad (1)$$

kie $h = x - x_j$; $j = l$, se $x_l \le x < x_{l+1}$; x_l, $l = 1...L$ - la argumentoj de tie ĉi nomataj "karakterizaj punktoj" de splajno. Estas notinde, ke nun ni uzas $L = N$ (kvanto da interpolitaj punktoj), sed eble $N \ge L$ (vidu sekcio 3). Ekster la intervalo $[x_1, x_L]$ ekzistas du eblecoj por kalkulo de j: se splajno estas neperioda, $j = L$, se $x < x_1$, kaj $j = L$, se $x \ge x_L$. Por splajno kun la periodo P, $j = L$ por ambaŭ okazoj, sed $h = P + x - x_L$, se $0 \le x \le x_1$. Por facileco de sekvaj esploroj, oni numeras "karakterizajn punktojn" laŭ la ordo de pliiĝo da argumentoj: $x_1 < x_2 < ... < x_L$. Parametro n estas la potenco de polinomo (1). Difekto k montras nin, kie "glata" estas splajno: ĉiaj derivatoj de splajno de potenco ĝis $(n - k)$ inkluzive estas kontinua eĉ en "karakterizaj punktoj".

Ĉi tie ni devas skribi kelkajn notojn. La polinomo ĉie havas kontinuajn derivatojn de ĉia potenco, Oni povas skribi ankaŭ, ke la polinomo havas difekton $k = 0$. Formale oni plusas novan karakterizaĵon – k, sed praktike tio ĉi signifas, ke splajnoj estas pli vasta klaso

Splajnoj estas kompleksaj funkcioj. Por diversaj argumentoj, la funkcioj uzataj por kalkulado estas diversaj, kontraŭ maniere kompare kun ĉiaj analitikaj funkcioj. Problemoj de ne–polinomaj splajnoj estas interesaj por teoriistoj (ekz. *Laurent* 1972), sed polinomaj splajnoj, kiaj estas nur parto de ĉiaj splajnoj, estas la plej ofte uzata parto, kaj ni diskutas nur ilin.

2.2 Ekzemploj

Splajnoj estis tre ofte uzitaj, sed ne havis tian ĉi nomon. Ekz. splajno de nula potenco (Fig. 1, $n = 0$), laŭ difine estas konstanta funkcio en ĉiu subintervalo kun (eble) diversaj valoroj en ĉiu. Difekto $k = 1$, tial la funkcio ne estas kontinua, sed la derivato de potenco (-1 = integralo) jes estas tia. "Histogramo" montranta kiomojn da ia fizika karakterizajo en subintervaloj povas esti la plej uzata ekzemplo. Tiuj ĉi splajnoj ($n = 0$, $k = 1$) ankaŭ estas uzataj por serĉo de periodaĵoj de varia signalo (metodo de *Jurkevich* 1971) aŭ por aproksimado de rentgenaj observoj per kosmaj sputnikoj (ekz. *Hearn* kaj *Richardson* 1977).

La splajnoj ($n = 1$, $k = 1$) estas linioj interligantaj "karakterizajn punktojn" (fig. 1, "$n = 1$"). Ili estas ofte uzataj por la interpolado de funkciaj valoroj, presitaj en tabeloj.

Tamen la plej ofte uzataj funkcioj en modernaj kalkuloj estas kubaj ($n = 3$, $k = 1$) splajnoj. Ili estas la plej glataj funkcioj, kiuj havas en intervalo $[x_1, x_L]$ kontinuan derivaton de potenco 2 kaj kiaj interpolas fiksitajn punktojn, tial en tia ĉi klaso da funkcioj, la kuba splajno minimumigas integralon

$$Z = \int_{x_1}^{x_L} \ddot{y}^2(x)\, \mathrm{d}x \tag{2}$$

(ekz. *Forsythe* k.a. 1977).

2.3 Bazaj splajn–funkcioj

Iu splajno kun fiksitaj argumentoj de "karakterizaj punktoj" $x_1 ... x_L$ povas esti kalkulita kiel

$$S(x) = \sum_{j=1}^{L} C_j\ S_j(x) \tag{3}$$

kie c_j estas koeficientoj (ĉi - okaze egalaj al la valoroj de funkcio $y_j = y(x_j)$), kaj $S_j(x)$ - la "bazaj funkcioj" difinitaj laŭ kondiĉoj

$$S_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad i \neq j \\ 1, & \text{se} \quad i = j \end{cases} \tag{4}$$

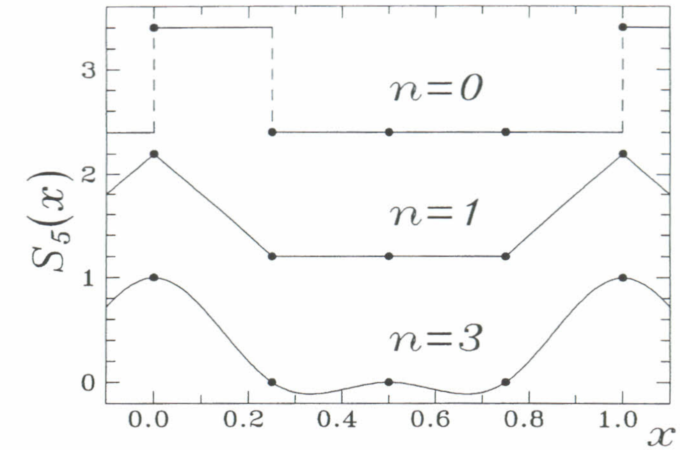

Fig. 1. Periodaj ($P = 1$) bazaj splajnoj $S_1(x)$ por $L = 4$ egaldistancaj laŭ argumento "karakterizaj punktoj" kaj difekto $k = 1$ por diversaj n.

Kompreneble, ke ekzistas senfina nombro da funkcioj havantaj tian ĉi proprecon, kaj ĉiaj tiaj funkcioj povas esti uzataj por la aproksimado. Tamen, se ni fiksus klason de funkcioj, la bazaj funkcioj ekestus determinataj. Se $S_j(x)$ estas splajno, la linia kombinacio (3) estas ankaŭ la splajno de la samaj valoroj de n kaj

2.4 Kial komputi koeficientojn de splajnoj ?

Antaŭe ni diskutis abstraktajn formulojn priskribantajn kunajn proprecojn. Sed por praktika apliko necesas havi klaran metodon de komputado de parametroj B_{jm} el ekvacio (1).

Por la plej simpla okazo $n = 0$, $k = 1$, oni povas skribi $B_{j0} = y_j$:

$$y(x) = y_j, \tag{5}$$

kie j estas determinata laŭ menciitaj kondiĉoj. Se $n = 1$, $k = 1$,

$$y(x) = y_j\, \bar{w} + y_{j+1}\, w, \tag{6}$$

kie $w = h/h_j$, $h = x - x_j$, $h_j = x_{j+1} - x_j$, $\bar{w} = 1 - w$. Laŭ *Forsythe* k.a. (1977), okaze de $n = 3$, $k = 1$,

$$y(x) = y_j\,\bar{w} + y_{j+1}\,w, + h_j^2((\bar{w}^3 - \bar{w})\,\beta_j + (w^3 - w)\,\beta_{j+1}), \qquad (7)$$

kie la valorojn de parametroj β_j oni povas komputi, solvante sistemon de L liniaj ekvacioj:

$$\begin{pmatrix} 2(h_L+h_1) & h_1 & 0 & 0 \;\ldots & 0 & h_L \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 \;\ldots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 \;\ldots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ h_L & 0 & 0 & 0 \;\ldots & h_{L-1} & 2(h_{L-1}+h_L) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \ldots \\ \beta_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 - D_L \\ D_2 - D_1 \\ D_3 - D_2 \\ \ldots \\ D_L - D_{L-1} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

(perioda splajno, kian ni markas kiel "splajno de tipo I"), aŭ

$$\begin{pmatrix} -h_1 & h_1 & 0 & 0 \;\ldots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 \;\ldots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 \;\ldots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \;\ldots & h_{L-1} & -h_{L-1} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \ldots \\ \beta_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_L^2\,\Delta_1 \\ D_2 - D_1 \\ D_3 - D_2 \\ \ldots \\ -h_{L-1}^2\,\Delta_{L-3} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

(splajno II), aŭ $\beta_1 = \beta_L = 0$,

$$\begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \;\ldots & 0 & 0 \\ 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 \;\ldots & 0 & 0 \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 \;\ldots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 \;\ldots & h_{L-2} & 2(h_{L-2}+h_{L-1}) \end{pmatrix} \times$$

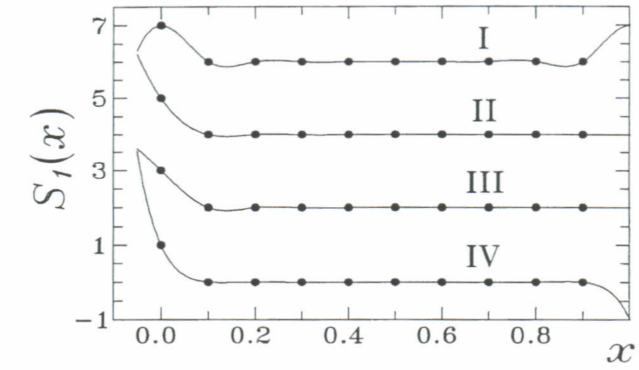

Fig. 2. Bazaj funkcioj (I–IV) por $L = 10$ kaj $j = 1$.

$$\times \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \ldots \\ \beta_{L-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_2 - D_1 \\ D_3 - D_2 \\ D_4 - D_3 \\ \ldots \\ D_{L-1} - D_{L-2} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

(splajno III), kie $D_j = (y_{j+1} - y_j)/h_j$, $j = 1 \ldots L-1$; $D_L = (y_1 - y_L)/h_L$, $h_L = P + x_1 - x_L$ (indekso L nur por periodaj splajnoj I), kaj

$$\Delta_j = \frac{1}{x_{j+3} - x_j}\left(\frac{D_{j+3} - D_{j+2}}{x_{j+3} - x_{j+2}} - \frac{D_{j+2} - D_{j+1}}{x_{j+2} - x_{j+1}}\right) \qquad (11)$$

estas aproksimaĵo por la tri–potenca derivato de aproksimata funkcio (tia ĉi valoro estas preciza, se la funkcio estas polinomo ($n \leq 3$, $k = 0$)).

Uzante ekvacion (7), oni povas skribi derivatojn:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = D_j + h_j\,(-(3\bar{w}^2 - 1)\,\beta_j + (3\,w^2 - 1)\,\beta_{j+1}) \\ y''(x) &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y(x) = 6\,(\beta_j\,\bar{w} - \beta_{j+1}\,w) \qquad (12) \end{aligned}$$

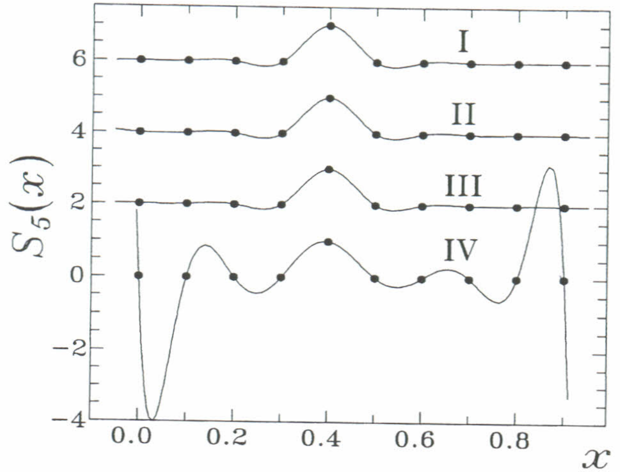

Fig. 3. Bazaj funkcioj (I-IV) por $L = 10$ kaj $j = 5$.

$$y'''(x) = \frac{d^3}{dx^3}y(x) = 6\frac{(\beta_{j+1} - \beta_j)}{h_j}$$

aŭ, kompare kun ekv. (1), por la karakterizaj punktoj,

$$\begin{aligned} y'(x_j) &= B_{j1} = D_j - h_j(2\beta_j + \beta_{j+1}) \\ y''(x_j) &= 2B_{j2} = 6\beta_j \\ y'''(x_j) &= 6B_{j3} = 6(\beta j + 1 - \beta_j)/h_j, \qquad j = 1...L-1 \end{aligned} \tag{13}$$

Por $j = L$ estas du eblecoj : por la perioda splajno I oni povas simple uzi indekson 1 por $(L+1)$, kaj por la splajnoj II kaj III

$$\begin{aligned} y'(x_L) &= D_{L-1} + h_{L-1}(\beta_{L-1} + 2\beta_L) \\ y''(x_L) &= 6\beta_L \\ y'''(x_L) &= y'''(x_{L-1}). \end{aligned} \tag{14}$$

Estas notinde, ke la splajno III true minimumigas integralon (2). Tiu ĉi splajno estas ofte nomata kiel "natura splajno", la plej glata sence de ekv. (2) funkcio. Sed tiu ĉi splajno ne estas la plej

bone aproksimanta funkcio - ni misaproksimas du-potencan derivaton de funkcio apud limoj de intervalo: $y''(x_1) = y''(x_L) = 0$. Tia ĉi kondiĉo ne estas trua por ĉiuj funkcioj. Pro tio *Forsythe* k.a. (1977) proponis uzi aliajn limkondiĉojn : aproksimi tri-potencan derivaton apud limoj uzante kvar apudajn "karakterizajn punktojn", alivorte: aproksimi tiujn ĉi kvar punktojn per polinomo ($n = 3, k = 0$), kaj uzi tia maniere kalkulitajn derivatojn $y'''(x_1)$ kaj $y'''(x_L)$. Tiu ĉi splajno II aproksimas analitikajn funkciojn pli bone, olla splajnoj III (vd. ankaŭ *Andronov* 1985a, 1986). Por komparo, bazaj funkcioj por polinomo, interpolanta ĉiujn punktojn estas

$$S_i(x) = \prod_{j \neq i}^{L} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{15}$$

Tiu ĉi *Lagrange*-a polinomo (funkcio IV laŭ nia signifo) aproksimas "karakterizajn punktojn", sed inter ili la variaĵoj de polinomo povas esti multoble pli grandaj kompare kun la variajoj de funkcio (fig.2, 3).

3 Glatigaj splajnoj : du manieroj de komputo

3.1 Metodo de "ĉiupunkta" splajno

Tre ofte oni devas aproksimi eksperimentajn valorojn per ia glata funkcio. Uzante splajnojn, tiu ĉi tasko povas esti solvata dumaniere. Pli malnova (kaj pli uzata) metodo bazas sin sur la minimumigado de sumo

$$Z_1 = \lambda^2 \int_{x_L}^{x_1} |y^{(m)}(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^{N} p_i(y_i - s(x_i))^2 \tag{16}$$

kie p_i estas ia "kontribua koeficiento" dependa de precizeco de valoro y_i; potenco de derivato m estas 2 (*Marĉuk* 1980) aŭ 3 (*Vondrak* 1969, *Picchio* 1981); λ^2 - ia parametro karakterizanta gradon de aproksimeco inter punktoj kaj aproksimanta kurbo. Se $\lambda^2 = 0$, la "glatiga" funkcio estas interpolanta splajno (kun "karakterizaj punktoj" ĉe la samaj argumentoj, kiel "eksperimentaj punktoj"). Se $\lambda^2 \neq 0$, la funkciaj valoroj ĉe "karakterizaj punktoj" estas variigitaj, kaj la splajno interpolas tiujn "korektitajn" punktojn. En tiu ĉi metodo ne estas tute klara la fizika senco de la parametroj λ^2 kaj p_i. Variigante ĝiajn valorojn, oni povas komputi multajn splajnojn, tial estas necese ellabori konkretajn kriteriojn por tio.

3.2 La metodo de "malplej grandaj kvadratoj"

Bazaj splajn–funkcioj (4) povas esti uzataj por komputado de koeficientoj C_j (ekvacio (3)) laŭ kondiĉo, ke

$$R = \sigma_{O-C}^2 = \sum_{i=1}^{N} p_i \left(y_i - \sum_{j=1}^{L} C_j S_j(x_i) \right)^2 \tag{17}$$

estas minimuma (se aliaj parametroj havas la samajn valorojn). Kontraŭ la metodo priskribita en sekcio 3.1, tie ĉi la "karakterizaj punktoj" povas havi argumentojn ne egalaj al argumentoj de "eksperimentaj punktoj" (ekz. *Andronov* 1985a). Oni povas skribi sistemon de L "normalaj ekvacioj"

$$\frac{\partial R}{\partial C_m} = 0 \tag{18}$$

aŭ

$$\sum_{j=1}^{L} A_{mj} C_j = Q_m \tag{19}$$

ke

$$\begin{aligned} A_{mj} &= \sum_{i=1}^{N} p_i S_m(x_i)\, S_j(x_i) \\ Q_m &= \sum_{i=1}^{N} p_i S_m(x_i)\, y_i \end{aligned} \tag{20}$$

Se la valoroj y_i estas determinataj kun la sama precizeco, $p_i = const = 1/N$. Ĉi –okaze oni povas komputi precizecon de la koeficientoj C_j laŭ ekvacio

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{N\,R}{N-L}}\,\sqrt{V_{jj}} \tag{21}$$

kie (V_{jk}) estas matrico inversa rilate al la matrico (A_{mj}) :

$$\sum_{j=1}^{L} A_{mj} V_{jk} = \delta_{mk} \tag{22}$$

(ekz. *Ceseviĉ* 1970). Laŭ la difino de bazaj funkcioj (4), σ_j estas precizeco de la komputitaj valoroj $S(x_j)$.

Estas notinde, ke por neperiodaj funkcioj (II–IV, 3), la valoro de σ_j pliiĝas ĉe la limoj de intervalo. Kompare malgranda valoro de σ_j apud centro de intervalo por interpolanta *Lagrange*–a polinomo (IV) estas ligita kun la pli granda sentiveco de tiu ĉi funkcio de malgrandaj variaĵoj de aproksimita funkcio. Tamen ĉe la limoj de intervalo, la valoroj σ_j multoble pliiĝas ankaŭ por la funkcio (IV). Por fiksita tipo de funkcio, la valoroj σ_j estas pli malgrandaj, se la kvanto da "glatigataj" punktoj estas pli granda apud tia "karakteriza punkto".

La FORTRAN–lingvaj programoj uzantaj la menciitajn metodojn estas publicitaj fare de l'aŭtoro (1985).

4 Integralado de funkcioj per splajnoj

Laŭ la ekvacioj (3), (4), oni povas skribi

$$\int_\alpha^\beta S(x)dx = \sum_{j=1}^{L} y_j G_j, \tag{23}$$

kie

$$G_j = \int_\alpha^\beta S_j(x)dx. \tag{24}$$

Se la argumentoj x_j da kelkaj aproksimataj funkcioj estas la samaj, oni povas komputi koeficientojn G_j kaj post multfoje (se necese) kalkuli integralojn (23) kun diversaj vektoroj y_j. Tiuj ĉi "kvadraturaj" formuloj estas ĉiam uzataj (metodoj de *Newton–Cotes*, *Ĉebiŝev* (vd. ekz. *Marĉuk* 1980, *Krilov* 1959), sed bazaj funkcioj ankaŭ povas esti splajnoj.

Por plej simpla (kaj ofta) okazo, "karakterizaj punktoj" estas egaldistancaj laŭ argumento; kaj la integralon (23) oni povas skribi tial

$$I = \int_\alpha^\beta S(x)\,dx = (\beta-\alpha)\sum_{j=1}^{L} g_j\, y(x_j), \qquad (25)$$

kie

$$g_j = \int_0^1 S_j(x')\,dx', \qquad x_j = \alpha + \frac{j-1}{L-1}(\beta-\alpha). \qquad (26)$$

En tab.1 ni skribis koeficientojn g_j por L=9, polinomo IV (ekz. *Dimarskij* k.a. 1963) kaj splajnoj II, III (*Andronov* 1986).

Tab. 1. Koeficientoj por kvadraturaj formuloj de la funkcioj II–IV

E	II	III	IV
E_1, E_9	36139	1071	989
E_2, E_8	132060	3080	5888
E_3, E_7	89886	2618	-928
E_4, E_6	109340	2744	10496
E_5	103518	2702	-4540
E	838368	21728	28350

Ĉiujn koeficientojn oni povas skribi tial

$$g_j = E_j/E, \qquad E = \sum_{j=1}^{L} E_j.$$

Estas notinde, ke $g_j = g_{L+1-j}$.

La glatigaj splajnoj ankaŭ povas esti uzataj por integralado (vidu *Andronov* 1986 por detaladiskuto kaj *FORTRAN*-lingvaj programoj).

5 Integralado de kvadratoj de funkcioj

Por iuj taskoj oni devas komputi integralon de funkcia kvadrato. Splajnoj ankaŭ estas uzeblaj por tiu ĉi celo. La tuta integralo estas la sumo de integraloj tra subintervaloj. Por kuba splajno

$$\int_0^h (b+ct+dt^2+et^3)^2\,dt = b^2h+bch^2+\frac{(c^2+2bd)h^3}{3}+$$
$$+\frac{(be+cd)h^4}{2}+\frac{(2ce+d^2)h^5}{5}+\frac{deh^6}{3}+\frac{e^2h^7}{7} \qquad (27)$$

kie $h = x - x_j$; $b = B_{j0}$, $c = B_{j2}$, $e = B_{j3}$. Se $x = x_{j+1}$, oni povas ankaŭ uzi la ekvacion (7). Tial

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} S^2(x)\,dx = h_j \sum_{k=0}^{3}\sum_{l=0}^{3} G^{kl}\, Y_k\, Y_l \qquad (28)$$

kie $Y_0 = y_j, Y_1 = y_{j+1}$, $Y_2 = h_j^2\beta_j$, $Y_3 = h_j^2\beta_{j+1}$, kaj

$$G^{kl} = \frac{1}{210}\begin{pmatrix} 70 & 70 & -56 & -49 \\ 0 & 70 & -49 & -56 \\ 0 & 0 & 16 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}. \qquad (29)$$

Se kalkuli simetrian matricon

$$T^{kl} = \frac{1}{2}(G^{kl} + G^{lk}) \qquad (30)$$

oni povas uzi ĝin en ekv.(28) anstataŭ G^{kl}. Tio ĉi signifas, ke la matrico T^{kl} estas la analogo de tie ĉi nomata "metrika tensoro" uzata aparte en la relativeca teorio.

6 Restarigado de funkcioj

Ĉiuj valoroj ricevitaj per mezuriloj ne estas precizaj. Krom la eraroj karakterizantaj precizecon, estas influo de mezurilo al la mezurata proceso. En ĉiuj mezuroj ni uzas filtrilon (de tempo, spaco, ondlongo, energio k.t.p.). En multaj okazoj ni povas skribi integralan ekvacion

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x')\, f(x - x')\, \mathrm{d}x. \tag{31}$$

Laŭ la ekvacioj (3,4),

$$y_j = \sum_{m=1}^{L} U_{mj}\, f_m \tag{32}$$

kie

$$U_{mj} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x')\, S_m(x_j - x')\, \mathrm{d}x', \tag{33}$$

y_j estas "mezuritaj" valoroj; $g(x')$ estas tie ĉi nomata "aparata funkcio" dependa de proprecoj de mezurilo; $f_m = f(x_m)$ - la restarigita funkcio. Se oni aproksimas funkcion $f(x)$ per fiksitaj bazaj funkcioj, komputante la matricon U_{mj}, oni povas restarigas "influitajn" valorojn. Oni ĉiam uzas por tiu ĉi celo nur metodon de rapida *Fourier*–a transformo (*FFT - Fast Fourier Transform*, v. ekz. *Brault* kaj *White* 1971). Tamen kubaj splajnoj ankaŭ povas esti uzeblaj (*Andronov* 1987a). En ambaŭ metodoj, la rezultoj forte dependas de uzata "lima frekvenco". Okaze de polinomaj splajnoj tiun ĉi rolon ludas la distanco inter "karakterizaj punktoj" de splajno (v. ankaŭ sekcion 7). "Glatigaj splajnoj" montras pli bonajn rezultpjn kompare kun la "interpolantaj", tial "glatigo" funkcias kiel "reguligo". La nura malavantaĝo de tiu ĉi metodo estas ligita kun malfacilaĵoj de kalkulo de matricaj elementoj.

Alia metodo bazita sur la loka aproksimado de funkcio per polinomo e kvara potenco (ankaŭ splajn–aproksimado: $n = 4$, $k = 4$) estis proponita fare de l'aŭtoro (1985b).

7 *Fourier*– spektroj de splajnoj

Se la funkcio estas aproksimata per la formulo

$$y(x) = C_0 + C_1 s_1 + C_2 c_1 + C_3 s_2 + C_4 c_2 + \ldots + C_{L-1} s_M + C_L c_M \tag{34}$$

kie $L = 2M + 1$, $s_m = \sin(2\pi m x)$, $c_m = \cos(2\pi m x)$ (argumentoj estas transformitaj tiel, kê la periodo $P = 1$), la koeficientojn C_j oni povas komputi, solvante sistemon de liniaj ekvacioj:

$$\begin{pmatrix} N & \Sigma s_1 & \Sigma c_1 & \ldots & \Sigma s_M & \Sigma c_M \\ \Sigma s_1 & \Sigma s_1 s_1 & \Sigma c_1 s_1 & \ldots & \Sigma s_M s_1 & \Sigma c_M s_1 \\ \Sigma c_1 & \Sigma s_1 c_1 & \Sigma c_1 c_1 & \ldots & \Sigma s_M c_1 & \Sigma c_M c_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Sigma s_M & \Sigma s_1 s_M & \Sigma c_1 s_M & \ldots & \Sigma s_M s_M & \Sigma c_M s_M \\ \Sigma c_M & \Sigma s_1 c_M & \Sigma c_1 c_M & \ldots & \Sigma s_M c_M & \Sigma c_M c_M \end{pmatrix} \times \tag{35}$$

$$\times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \ldots \\ C_{2M} \\ C_{2M+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma y \\ \Sigma s_1 y \\ \Sigma c_1 y \\ \ldots \\ \Sigma s_M y \\ \Sigma c_M y \end{pmatrix} \tag{36}$$

kie

$$\Sigma s_m = \sum_{i=1}^{N} \sin(2\pi m x_i), \quad \Sigma c_m = \sum_{i=1}^{N} \cos(2\pi m x_i),$$

k.t.p. Se x_i estus kalkulata, tial $x_i = iJ/N$+const ($J \neq 0$ - ĉiu entjero), la *Fourier*–a transformo estus

$$C_1 = \frac{1}{N}\Sigma y; \quad C_{2m} = \frac{2}{N}\Sigma s_m y; \quad C_{2m+1} = \frac{2}{N}\Sigma c_m y. \tag{37}$$

Oni povas ankaŭ skribi, ke

$$C_{2m} s_m + C_{2m+1} c_m = R_m \cos(2\pi m x_i - \phi_m) \tag{38}$$

kie R_m kaj ϕ_m estas la amplitudo kaj fazo de sinus–kurbo No m:

$$\begin{aligned} R_m \sin\phi_m &= C_{2m} \\ R_m \cos\phi_m &= C_{2m+1} \end{aligned} \tag{39}$$

Ekz., sur fig. 4 estas desegnitaj *Fourier*–spektroj (dependeco R_m de m) por periodaj bazaj splajnoj kun L =4, 8 kaj 16). Pliigante L, oni povas pliigi kontribuon de oscilaĵoj kun grandaj m.

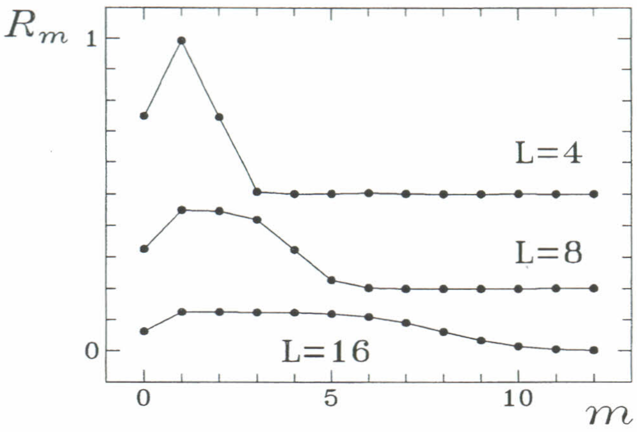

Fig. 4. *Fourier*–spektroj da periodaj bazaj kubaj splajnoj ($n = 3$, $k = 1$).

La "lima frekvenco" m_0 (montranta por kiaj $m > m_0$ la oscilaĵoj ne estas signifaj) dependas de kvanto da "karakterizaj punktoj" L. El fig.4, $m_0 \approx L/2 + 2 \pm 1$. Tial se valoroj de L estas la samaj por "splajna" kaj "trigonometria" aproksimado, la splajnoj aproksimas "eksperimentaj" punktoj pli bone iomete – ili havas "ekstrajn oscilaĵojn" kun $m > L/2$.

Estas notinde, ke la grado de proksimeco inter punktoj kaj kurbo pliiĝas kun pliiĝo de L. Tamen se pli multe da parametroj oni havas, malpli precizaj estas ties valoroj. Tial oni povas serĉi "optimuman" valoron de kvanto da komputataj parametroj.

8 Serĉo de periodo de varia signalo

La matematika tasko jenas: estas du vektoroj t_i, y_i, $i = 1...N$. Eastas necese komputi parametrojn $T_)$, P, $C_1...C_L$, por kiuj la

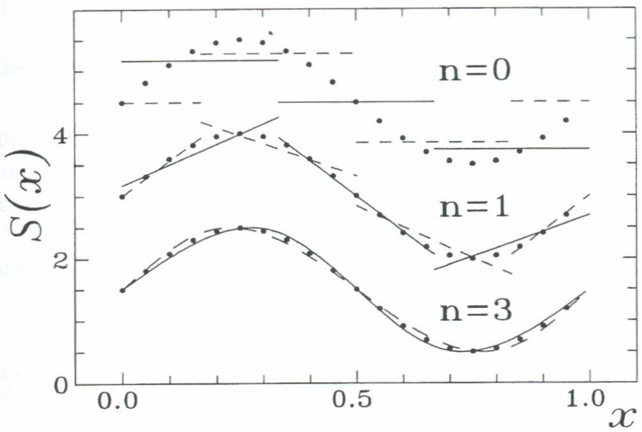

Fig. 5. Splajnoj ($n = 0$, $k = 1$; $n = 1$, $k = 2$; $n = 3$, $k = 1$) aproksimantaj la "testan" sinuson determinatan en 20 punktoj. Du kurboj estas desegnitaj por diversaj valoroj da "komenca epoko".

valoro de tie ĉi nomata "testa funkcio"

$$Q(T_0, P; t_1...t_N; y_1...y_N; C_1...C_L)$$

havas ekstremon (v. *Pelt* 1980, *Heck* k.a. 1985, *Andronov* 1988 por revuoj). Oni povas uzi ekvacion (17). Tiam x_i =dec($(t_i - T_0)/P$), kie x_i estas la fazo de i–a punkto, T_0– "komenca epoko", P– testa periodo, dec(x)– decimala parto de x: $0 \le$dec$(x) < 1$. Komputante la funkcion Q por diversaj periodoj, oni povas determini "plej bonan" periodon. Parametroj $C_1...C_L$ por ĉia testa periodo estas komputataj per la metodo de "malplej grandaj kvadratoj" (v. sekcion 3.2).

Bedaŭrinde, por ĉiuj splajnoj la funkcio Q dependas de la "komenca epoko" T_0 (v. fig.5). Tial estas necese pli foje "glatigi"

Scienca Revuo Vol. 46 (1995)(1) - 166

"glatigendajn funkciojn":

$$S^*(x) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} S(x,k) \qquad (40)$$

kie $x_{1k} = (k-1)/(KL)$, $x_{lk} = (l-1)/L + x_{1k}$ estas argumentoj de "karakterizaj punktoj" de splajno $S(x,k)$ Por ĉiu k estas determinitaj la parametroj C_j, kaj "glatigata" (laŭ (39)) kurbo estas uzata en ekv.(17) anstataŭ "trua splajno" $\sum_j C_j S_j(x_i)$.

La precizeco de kurba valoro ĉe argumento x povas esti kalkulata per la formulo

$$\sigma^2(x) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} (S(x,k) - S^*(x))^2 \qquad (41)$$

Splajno ($n = 0$, $k = 1$) estas uzata en la metodo de *Jurkevich* (1971); ($n = 1$, $k = 2$) - de *Marraco* kaj *Muzzio* (1980); ($n = 3$, $k = 1$) - de *Andronov* (1985a, 1988). Fazaj kurboj por tiuj ĉi metodoj estas montrataj en fig. 5. Pli detale la metodo estas priskribita fare de l'aŭtoro (1987b) kaj unue uzata en astronomio per *Andronov* kaj *Richter* (1987).

9 Finaj rimarkigoj

La priskribitaj taskoj ne estas ĉiuj aplikoj de aparato de splajn–funkcioj. Estas multaj monografioj pri tiu ĉi temo (ekz. *Steĉkin* kaj *Subbotin* 1976, *Topoljanskij* kaj *Krilova* 1977 pri metodoj de solvado de diferencialaj ekvacioj uze de splajnoj). Tamen ni volis nur montri diversajn problemojn kaj direktojn ligitajn kun splajnoj. Por ĉiuj taskoj ekzistas multaj solvoj, kaj aperadas novaj flankoj de tiu ĉi disvolvata metodo.

Splajnoj ne estas analitikaj funkcioj - ĝiaj derivatoj ne estas kontinuaj ĉe "karakterizaj punktoj". Ili ne havas klaran fizikan sencon (kiel ekz. *Fourier*–oscilaĵoj), tial ni devas ne forgesi, ke splajnoj estas ne granda fizika invento, sed signifa kaj fruktodona ilo de komputora matematiko.

Scienca Revuo Vol. 46 (1995)(1) - 166

10 Literaturo

Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. (1967): The Theory of Splines and their Applications. - Academic Press. New York.

Andronov I.L. (1985a): Opredelenie Parametrov Sglaĵivajuŝĉego Splajna s Zadannimi Znaĉeniami Argumenta. - Preprinto UkrNIINTI, 131-Uk85Dep., 38p., Kiev

Andronov I.L. (1985b): O Zavisimosti Krivoj Bleska AM Gerkulesa ot Svetimosti. - Pisjma v Astronomiĉeskij Ĵurnal, 11, 203

Andronov I.L. (1986): Ob Integrirovanii Splajn-Funkcij. - Preprinto UkrNIINTI, 358-Uk86Dep., 64p., Kiev

Andronov I.L. (1987a): On the Restoration of Functions from the Distorted Values by Using the Cubic Spline–Function Technique. - International Ernst Abbe Conference on Optics. Abstracts, Jena, p.48.

Andronov I.L. (1987b): Smoothing the 'Smoothing' Cubic Spline - Functions.- Contrib. Astron. Inst. Czechoslovak., 20, 161.

Andronow I.L. (1989): Über Periodensuchverfahren für veränderliche Signale. - Die Sterne, 65, 20.

Andronov I.L., Richter G.A. (1987): V 361 Lyrae : An Exotic Binary System with a 'Hot Spot' Between the Components ? - Astronomische Nachrichten, 308, 235.

Brault J.W., White O.R. (1971): The Analysis and Restoration of Astronomical Data via the Fast Fourier Transform. - Astronomy & Astrophysics, 13, 169.

Ceseviĉ V.P. (1970): Peremennie Zvezdi i Sposobi ih Issledovania. Pedagogika, Moskva.

Dimarskij J.S., Lozinskij N.N., Makuŝkin A.T., Rosenberg V.J., Erglis V.R. (1963): Spravoĉnik Programmista, Sudpromgiz, Leningrad.

Forsythe G.E., Malkolm M.A., Moler C.B. (1977): Computer Methods for Mathematic Computation. - Prentice-Hall, Inc., N.J.

Hearn D.R., Richardson J.A. (1977): The X-ray Light Curve of

AM Herculis.-Astrophys. J., 213, L115.

Heck A., Manfroid J., Mersh G. *(1985): On Period Determination Methods. Astronomy & Astrophysics Suppl., 59, 63.*

Jurkevich I. *(1971): A method of Computing Cyclic Phenomena. - Astrophysics & Space Science, 13, 154.*

Kornejĉuk N.P. *(1984): Splajni v Teorii Pribliĵenia, Nauka, Moskva.*

Krilov V.I. *(1959): Pribliĵennoe Viĉislenie Integralov, Fizmatgiz, Moskva.*

Laurent P.J. *(1972): Approximation et Optimisation. - Hermann, Paris.*

Marraco H.G., Muzzio J.C.*(1980): An Improved Method to Derive Periods of Cyclic Phenomena. - Publ. Astron. Society Pacific, 92, 700.*

Marĉuk G.I. *(1980): Metodi Viĉisliteljnoj Matematiki, Nauka, Moskva.*

Pelt J.E. *(1980): Ĉastotnij Analiz Astronomiĉeskih Vremennih Rjadov, Valgus, Tallinn.*

Picchio G. *(1981): Minimum of Light Curves from a Spline-Smoothing Technique. - Astronomy and Astrophysics, 94, 52.*

Steĉkin S.B., Subbotin J.N. *(1976): Splajni v Viĉisliteljnoj Matematike. - Nauka, Moskva.*

Topoljanskij D.B., Krilova T.V. *(1977): Priloĵenia Kubiĉeskih Splajnov dlja Pribliĵennogo Reŝenia Graniĉnih Zadaĉ. - Dnepropetrovsk.*

Vondrak I. *(1969): A Contribution to the Problem of Smoothing Observational Data. - Bull.Astron. Inst. Czechoslovak.- 20, 6, p. 349.*

Zavjalov J.S., Kvasov B.I., Miroŝhiĉenko V.L. *(1980): Metodi Splajn-Funkcij. - Nauka, Moskva.*

IMPERATIVOJ DE LA KULTURO KAJ EDUKADO EN LA EVOLUO DE LA HUMANITARA PENSADO DE LA PERSONECO

VLADIMIR I. IONESOV (RU)

La sciencteknika progreso kaj la nuntempa reorganizo de la mondo kauzis premantan ŝarĝon senprecedencan en la historio je la konscio de la homo kaj starigas al la edukado la neordinarajn demandojn: trovi kaj ne perdi la homecon en la homo kaj turni ties unikan kulturindividuan potencialon en la direkton de konstruktiva kultura kreado. Alegorie rimarkis Morton Hunt: "Enigmo de la homa naturo ekzistas en tio, ke la homo povas agi simile al diabloj de la infero, sed ankau simile al anĝeloj de la ĉielo" (1990, p. 226). Kiun rolon la edukado povas ludi en eltrovado de la homo, en realigo de ties unikaj kreoplenaj kapabloj kaj en konfirmo de la kreivaj personecaj bazoj en la kultura evoluo de la socio?

Unu el la plej gravaj premisoj por la solvo de tiuj demandoj estas kultura identigo de la personeco, t.e. maksimume ebla kunigo de la individuo kun ties persona interna esenco, elstarigo de la naturaj kapabloj de la personeco, ĝia emancipigo for de ĉiuj egaligaj unuformecaj kaj stereotipa ŝablonoj (Ionesov, 1993).

Bazo de ĉia individuiĝo kaj kreado estas la libereco de la eleko. Unikeco de ĉiu homo kiel personeca neripetebla fenomeno premisas, ke