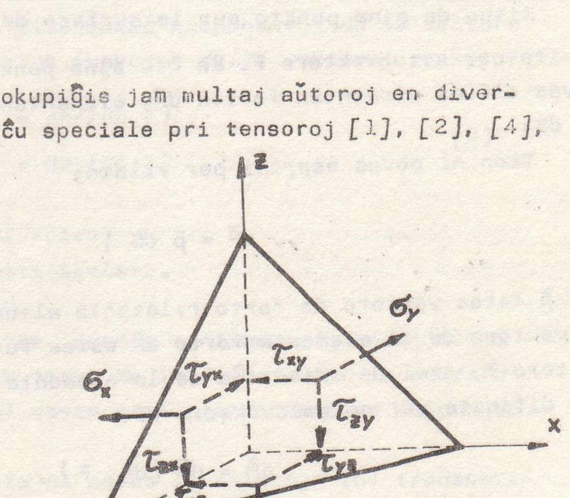
SCIENCA REVUO de Internacia Scienca Asocio Esperantista BEOGRAD, Jugoslavio | El Vol. 26 n-ro 2(112) 25.4.1975.

ĜENERALE PRI TENSIOTENSORO

(Vl. Němec, ZILINA, Ĉeĥoslovakio)

Per tiu ĉi problemo okupiĝis jam multaj aŭtoroj en diversaj publikajoj traktataj ĉu speciale pri tensoroj [1], [2], [4], [8], [9], ĉu pri elasteco [2], [7], [10], [15], plastikeco [5], [6], [12], [13], [14], ĉu pri fizikaj ecoj de la kristaloj [11].



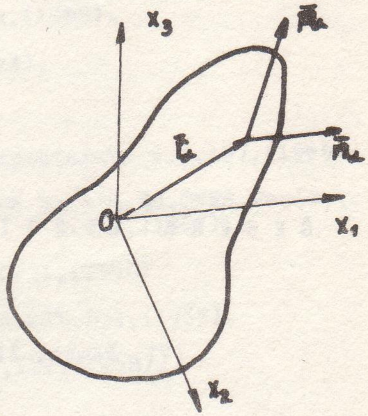
Ciuj menciitaj aŭtoroj la problemon solvas en ortaj koordinatoj skribante la ekvaciojn de ekvilibro por elementa kvaredro, elprenita en koncerna punkto de donita korpo, kies tri edroj estas paralelaj kun ebenoj difinitaj per aksoj de la orta koordinatsistemo /bil. 1/.

*

* *

En tiu ĉi kontribuaĵo ni penos alpaŝi al la problemo pli ĝenerale.

Ni havu korpon T de ajna formo kaj dimensioj, sur kies surfaco efikas ajna kontinua ŝarĝo /Rim.:Tiel nomata nekontinua ŝarĝo kaj sole efikantaj fortoj estas en sia esenco kontinua ŝarĝo malkomplikita por simpligi la solvadon de la problemo/. En ajnan punkton O /bil.2/ ni enmetu komencon de ajna oblikva koordinatsistemo /x_1, x_2, x_3/donita per tri unuovektoroj $\bar{e}_i$, kiuj ne estas komplanaraj:



$$\bar{e}_1 . (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3) \neq 0$$

Situo de ajna punkto sur la surfaco de la korpo T estos difinita per situovektoro $\bar{r}$. En ĉiu ajna punkto de la surfaco ni povas difini elementan forton $d\bar{P}$, efikantan sur elementa surfaco dS.

Tion ni povas esprimi per rilato:

$$d\bar{P} = \bar{p}\ dS \ , \qquad (1)$$

kie $\bar{p}$ estas vektoro de forto rilatanta al unuo de la surfaco. La vektoro de la elementa forto $d\bar{P}$ estas funkcio kiel de situovektoro $\bar{r}$, tiel de orientiĝo de la elementa surfaco dS, kiu estas difinita per normalovektoro $d\bar{n}$:

$$d\bar{P} = d\bar{P}\,(d\bar{n},\ \bar{r}) \ . \qquad (2)$$

La vektoron $d\bar{P}$ ni povas en difinita neorta koordinatsistemo esprimi per duspecaj komponantoj:

$$d\bar{P} = dP^j\,\bar{e}_j\,, \qquad (3)$$

kie dP^j estas kontravariantaj komponantoj de la vektoro $d\bar{P}$ [8], aŭ:

$$d\bar{P} = dP_i\,\bar{e}^i\,, \qquad (4)$$

kie dP_i estas kovariantaj komponantoj de la vektoro de la elementa forto $d\bar{P}$. Vektoroj $\bar{e}^i$ kreas konjugitan bazon al la bazo donita per vektoroj $\bar{e}_j$:

$$\bar{e}^j = \frac{\bar{e}_i \times \bar{e}_k}{V}\,,$$

kie indicoj j,i,k estas cikla permutacio de numeroj 1, 2, 3 kaj V estas volumeno:

$$V = \bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)\,.$$

Kiel ni jam konstatis, la elementa forto $d\bar{P}$ estas funkcio de la normalovektoro $d\bar{n}$, kiu karakterizas elementan surfacon dS kaj de la situovektoro $\bar{r}$. Tial ankaŭ komponantoj de la vektoro de la elementa forto $d\bar{P}$ estos funkcioj de la vektoroj $d\bar{n}$ kaj $\bar{r}$:

$$dP^j = dP^j(d\bar{n},\bar{r})\,,$$

$$\text{respektive} \qquad dP_i = dP_i(d\bar{n},\bar{r})\,. \qquad (5)$$

Pri la rilatoj (5) ni scias:

a/ Rezulta grando devas esti skalaro.

b/ Por $d\bar{n} = 0$ ankaŭ $d\bar{P} = 0$.

c/ dP^j, respektive dP_i estas grandoj senlime malgrandaj de la unua rango kaj tial ĉiu termo de la funkcio sur la dekstra flanko de la rilato (5) devas esti grando senlime malgranda ankaŭ de unua rango.

Surbaze de la menciita ni povas la rilatojn (5) transskribi en la sekvontajn formojn:

Sumsignoj por indicoj, kiuj ŝanĝiĝas sinsekve de 1 ĝis 3 estas ellasitaj. Temas pri esprimoj, en kiuj koncernaj indicoj ĉiam troviĝas en duopo.

$$dP^j = d\bar{n}\cdot\bar{k}^j(\bar{r}) \ ,$$

$$dP_i = d\bar{n}\cdot\bar{b}_i(\bar{r}) \ , \qquad (6)$$

kiu estas ununura formo de transskribo de la rilatoj (5). Ĉiujn aliajn formojn ni povas transformi en la formojn (6).

Sur la dekstra flanko de la rilatoj (6) ni havas en la skalara produto normalovektoron $d\bar{n}$ kun iaj vektoroj $\bar{k}^j$, respektive $\bar{b}_i$, pri kiuj ni ĝisnune scias, ke ili estas funkcioj de la situovektoro $\bar{r}$. Surbaze de la rilatoj (6) ni povas transskribi la ekvacion (3) en la formon:

$$d\bar{P} = [d\bar{n}\cdot\bar{k}^j(\bar{r})]\bar{e}_j = d\bar{n}\cdot[\bar{k}^j(\bar{r})\bar{e}_j], \qquad (7)$$

respektive la ekvacion (4) en la formon:

$$d\bar{P} = [d\bar{n}\cdot\bar{b}_i(\bar{r})]\bar{e}^i = d\bar{n}\cdot[\bar{b}_i(\bar{r})\bar{e}^i]. \qquad (8)$$

En rektaj krampoj sur dekstraj flankoj de la rilatoj (7), respektive (8) troviĝas sumoj da diadoj, kiuj kreas tensoron de la dua grado:

$$T(\bar{r}) = \bar{k}^j(\bar{r})\bar{e}_j = \bar{b}_i(\bar{r})\bar{e}^i. \qquad (9)$$

Nun ni povas la rilatojn (7), respektive (8) esprimi unuforme:

$$d\bar{P} = d\bar{n}\cdot T(\bar{r}). \qquad (10)$$

Helpe de tensoro de la dua grado $T(\bar{r})$ ni aligas al normalovektoro $d\bar{n}$ vektoron de elementa forto $d\bar{P}$. Tiu ĉi aligo estas por donita situovektoro $\bar{r}$ unusignifa kaj tial ne decidas, ĉu aligo okazis per dekstra aŭ maldekstra skalara produto de normalovektoro $d\bar{n}$ kun tensoro $T(\bar{r})$.

Tial:

$$d\bar{P} = d\bar{n}\cdot T(\bar{r}) = T(\bar{r})\cdot d\bar{n} \ . \qquad (11)$$

Sed tiun ĉi econ havas tensoroj simetriaj, do la tensoro $T(\bar{r})$ estas tensoro simetria. Helpe de la rilatoj:

$$d\bar{P} = \bar{p}\ dS$$

kaj $$d\bar{n} = \bar{n}\ dS, \qquad \text{kie} \quad |\bar{n}| = 1,$$

ni povas la ekvacion (10) transformi en jenan formon:

$$d\bar{P} = \bar{p}\, dS = \bar{n}\cdot T(\bar{r})dS \; . \tag{12}$$

Rezultan forton $\bar{P}$ efikantan sur difinitan korpon ni ricevos per integrado de la rilato (12) tra la tuta surfaco de la korpo T:

$$\bar{P} = \int\limits_S \bar{p}(\bar{r})\, dS = \int\limits_S \bar{n}\cdot T(\bar{r})dS \; . \tag{13}$$

Rimarko: Ne temas pri ekvilibro de fortoj, ĉar ni neglektas la pezon de la korpo kaj tial $P \neq 0$.

Du integraloj, kies integradon ni plenumas tra la sama surfaco certe egalas, se egalas la subintegralaj funkcioj:

$$\bar{p}(\bar{r}) = \bar{n}\cdot T(\bar{r}) . \tag{14}$$

La tensoron $T(\bar{r})$ ni devas rigardi kiel tensoran kampon, helpe de kiu ni aligas al la normalo-vektoro $\bar{n}$ vektoran kampon $\bar{p}(\bar{r})$.

Ĉar ni en la komenco de nia eskpliko parolis pri la korpo de ajna formo kaj dimensio, sur kies surfacon efikas ajna kontinua ŝarĝo, ni per tio difinis senfinan aron da korpoj, en kiun enviciĝas ankaŭ ĉiuj subkorpoj /korpelementoj elprenitaj el koncerna korpo/. Do ni jam ne estas limigitaj je la surfaco de la korpo, sed ni povas difini la vektoron $\bar{p}(\bar{r})$ en kiu ajn punkto de la korpo. Tiuokaze estas la vektoro $\bar{p}(\bar{r})$ nomata tensiovektoro kaj la tensoro $T(\bar{r})$, helpe de kiu ni la tensiovektoron elkalkulas, ni nomos tensiotensoro.

Sed en la diadoj de la tensiotensoro $T(\bar{r})$ troviĝas ankoraŭ nedifinitaj vektoroj $\bar{k}^j(\bar{r})$, respektive $\bar{b}_i(\bar{r})$. Tiujn ĉi vektorojn ni ankaŭ povas esprimi helpe de iliaj kontravariantaj aŭ kovariantaj komponantoj:

$$\bar{b}_i(\bar{r}) = b_{ik}(\bar{r})\bar{e}^k = b_i^{\;k}(\bar{r})\bar{e}_k \; , \tag{15}$$

respektive:
$$\bar{k}^j(\bar{r}) = k^j_{\;p}(\bar{r})\bar{e}^p = k^{jp}(\bar{r})\bar{e}_p \; . \tag{16}$$

La tensoron $T(\bar{r})$ do ni povos skribi en la formo:

$$T(\bar r) = k^j{}_p(\bar r)\bar e^p\bar e_j = k^{jp}(\bar r)\bar e_p\bar e_j = b_{ik}(\bar r)\bar e^k\bar e^i = b_i{}^k(\bar r)\bar e_k\bar e^i. \quad (17)$$

Por ke ni povu elkalkuli komponantojn de la vektoroj $\bar k^j(\bar r)$, respektive $\bar b_i(\bar r)$ laŭ rilato (14) ni devas koni tensiovektorojn apartenantaj al tri normalovektoroj /tiuj ĉi tri normalovektoroj ne darfas esti komplanaraj/. Ni devas konsideri, ke ne temas pri konstantaj tensiovektoroj, sed pri la vektoroj, kiuj estas funkcioj de la situovektoro $\bar r$, do temas pri vektoraj kampoj.

Solvante konkretan problemon ni intence elektos tian koordinatsistemon, kies unuovektoroj $\bar e_j$ estas paralelaj kun normalovektoroj, kies tensiovektoroj estas konataj. Eluzinte la rilatojn (17) en la evacio (14) ni povos difini unuopajn komponantojn de nekonataj vektoroj $\bar k^j(\bar r)$, respektive $\bar b_i(\bar r)$:

$$p_r{}^s(\bar r) = k^{jq}(\bar r)g_{rq}g_{js} = k^j{}_r(\bar r)g_{js} = b_s{}^k(\bar r)g_{rk} = b_{sr}(\bar r), \quad (18)$$

kie $p_r{}^s$ estas projekcio de la vektoro $\bar p$ apartenanta al normalovektoro $\bar n_r$ en la direkton de la unuovektoro $\bar e_s$. Plue:

$$g_{rs} = \bar e_r \cdot \bar e_s.$$

En tiu okazo, se temas pri orta koordinatsistemo la kovariantaj kaj kontravariantaj komponantoj de la vektoro egalas kaj validas:

$$\bar e_j = \bar e^j = \bar i_j$$

kaj
$$g_{rs} = \begin{cases} 1 \text{ por } r = s \\ 0 \text{ por } r \neq s, \end{cases}$$

kie $\bar i_j$ estas unuovektoroj de orta koordinatsistemo.

La rilaton (18) en orta koordinatsistemo ni povas transskribi en la formon:

$$p_{rs} = k_s{}^r = k^{sr} = b^s{}_r = b_{sr}$$

kaj la tensiotensoro $T(\bar{r})$ estos difinita per rilato:

$$T(\bar{r}) = p_{rs}(\bar{r})\bar{i}_r\bar{i}_s. \qquad (19)$$

Se ni volas difini tensiarostaton en certa punkto B de donita korpo T, kiu estas difinita per la situovektoro $\bar{r}_B$, tiam tensoro priskribanta tiun ĉi tensiarostaton estos difinita per la rilato:

$$T(\bar{r}_B) = p_{rs}(\bar{r}_B)\bar{i}_s\bar{i}_r \qquad (20)$$

kaj la tensiovektoro apartenanta al la normalovektoro $\bar{n}_\alpha$ en la punkto B:

$$\bar{p}_\alpha(\bar{r}_B) = \bar{n}_\alpha \cdot T(\bar{r}_B). \qquad (21)$$

Normala projekcio de la tensiovektoro - normalotensio - apartenanta al la normalovektoro $\bar{n}_\alpha$ estas donita per skalara produto de ambaŭ vektoroj:

$$p_{\alpha\alpha} = \bar{p}_\alpha(\bar{r}_B)\cdot\bar{n}_\alpha = \bar{n}_\alpha\cdot T(\bar{r}_B)\cdot\bar{n}_\alpha\,. \qquad (22)$$

Se la normalovektoro $\bar{n}_\alpha$ estas difinita per:

$$\bar{n}_\alpha = \cos\alpha_k\bar{i}_k, \qquad (23)$$

ni ricevos per la solvado de la ekvacio (22):

$$p_{\alpha\alpha} = p_{11}\cos^2\alpha_1 - 2p_{12}\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - 2p_{13}\cos\alpha_1\cos\alpha_3 -$$
$$- p_{22}\cos^2\alpha_2 - 2p_{23}\cos\alpha_2\cos\alpha_3 - p_{33}\cos^2\alpha_3. \qquad (24)$$

Ni venis al la rilato por elkalkulo de normalotensio en la ebeno difinita per normalovektoro laŭ rilato (23).

En la rilato (24) ni jam eluzis rilatojn:

$$p_{ij} = p_{ji}$$

Egaleco de tanĝantaj tensioj por orta koordinatsistemo rezultas el tio, ke tensiotensoro estas tensoro simetria, kion ni jam konstatis dum nia ekspliko. Tiu ĉi kondiĉo memkomprenenble validas ankaŭ en oblikva koordinatsistemo, sed ĉi tie ne temas pri tanĝantaj tensioj efikantaj en la ebenoj difinitaj per donitaj normalovektoroj.

BIBLIOGRAFIO:

[1] Akivis,M.A.,Galdberg,V.V.: Tenzornoe isčislenie. Izdatelstvo "Naŭka", Moskva 1969

[2] Bezuňov,N.I.:Osnovy teorii uprugosti, plastičnosti i polzučesti. Izdatelstvo "Vysšaja škola", Moskva 1968

[3] Frey,T.Pachova,Z.: Vektorová a tenzorová aňalýza. SNTL, Praha 1964

[4] Garaj,J.:Základy vektorového počtu. Nakladateľstvo ALFA, Bratislava 1968

[5] Gödfrey,H.: Theoretical Elasticity and Plasticity for Engineers. Thames and Hudson - London

[6] Hoffmann,O, Sachs,G.: Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers, New York 1953

[7] Höschel,C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha 1971

[8] Kilčevskij,A.: Základy tenzorového počtu a jeho použití v mechanice. SNTL, Praha 1956

[9] Kočin,N.E.: Vektornoe isčislenie i načala tenzornogo isčislenija. Izdatelstvo "Nauka", Moskva 1965

[10] Musňelišvili;N.I.: Nekotorie osnovnye zadači matematičeskoj teorii uprugosti. Izdatelstvo "Nauka", Moskva 1966

[11] Nye,J.F.: Physical Properties of Crystals. Oxford at the Clarendon Press 1957

[12] Pešina,E.: Základy užité teorie plasticity. SNTL, Praha 1966

[13] Samul,V.I.: Osnovy teorii uprugosti i plastičnosti. Izdatelstvo "Vysšaja škola", Moskva 1970

[14] Sobotka,Z.: Theorie plasticity. Nakladatelství ČSAV, Praha 1954

[15] Wang, Chi-Teh: Applied Elasticity, New York 1953

Resumo:

ĜENERALE PRI TENSIOTENSORO

Ing.Vladimír Němec,Žilina,ČSSR

En la kontribuaĵo estas donita nova metodo de difino de tensiarstato en koncerna punkto de la korpo. Matematika eksplikо eliras rigore el la tensor-kalkulo, kio signifas, ke estis eliminita neceso de la enkonduko de elementa orta paralelepipedo, kiu estis uzita en ĉiuj ĝisnunaj publikaĵoj. Pro pli bona ĝeneraleco estis uzita oblikva koordinatsistemo, kiu permesas elkalkuli tensiovektoron en koncerna ebeno el tri konataj tensiovektoroj efikantaj en tri libervolaj ebenoj. Dum eksplikо oni venas al simpla rilato por la elkalkulo de tensio efikanta en koncerna ebeno, kiun ni difinis per la skalara produto de normalovektoro kaj tensiotensoro (14) kaj (21). El la eksplikо rezultas, ke tensiotensoro estas tensoro simetria, el kio oni povas konkludi por orta koordinatsistemo kondiĉon de egaleco de tanĝantaj tensioj laŭ rilato:

$$p_{ij} = p_{ji}$$

Tiu ĉi kondiĉo memkompreneble validas ankaŭ en oblikva koordinatsistemo, sed ĉi tie ne temas pri tanĝantaj tensioj efikantaj en la ebenoj difinitaj per donitaj normalovektoroj.