Komento pri la teoremo Steiner-Lehmus

Andy Pepperdine*

La teoremo Steiner-Lehmus konstatas, ke se du internaj dusekcantoj de trilatero egalas, do la trilatero estas izocela. Ĉi tiu noto klopodas klarigi kial ĝi estas malfacile pruvebla, kvankam ĝi bezonas nur simplajn geometrajn nociojn. Preskaŭ ĉiuj pruvoj estas nedirektaj, sed ankaŭ unu direkta pruvo estas donata ĉi tie.

1 Enkonduko

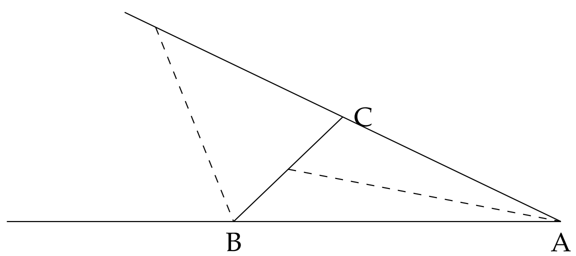
En la lasta nombro de ĉi tiu Revuo, Górowski. Klakla kaj Łomnicki priskribis kelkajn pruvojn de la teoremo Steiner-Lehmus. Ne facilas trovi solvon por ĝi, kaj ĉi tiu noto klopodos klarigi kial.

La teoremo estis eldirata unue de la germana matematikisto C. L. Lehmus dum 1840. Jakob Steiner estis inter la unuaj, kiuj trovis pruvon, sed li ne publikigis ĝin ĝis 1844. Preskaŭ ĉiuj pruvoj estas nerektaj. Ekzemplon de rekta pruvo mi donos sube.

La malfacilaĵo kuŝas en la fakto, ke angulo havas du dusekcantojn. En triangulo unu el ili estas interna kaj intersekcas la kontraŭan flankon inter la aliaj du verticoj. La alia sidas eksteren al la triangulo. La teoremo validas kiam ambaŭ dusekcantoj estas internaj, aŭ ambaŭ estas eksteraj. Sed se unu estas interna kaj la alia ekstera, do la teoremo ne validas.

Estas trianguloj ne-izocelaj, en kiuj unu interna dusekcanto egalas al alia ekstera, ekz. en bildo 1

La flankoj de la triangulo estas proksimume $a = 1,0$; $b = 1,6$; $c = 2,01648$ kaj la dusekcantoj estas proksimume $1,72618$.



Bildo 1: Ne-izocela triangulo kun du egalaj dusekcantoj

* andy@pepsplace.org.uk

2 La teoremo

La teoremo kutime diras ke, se la du internaj dusekcantoj egalus, do la triangulo estus izocela. Se oni havas pruvon por ĉi tiu formo, povas esti interesa ŝanĝi ĝin por montri la rezulton por du eksteraj dusekcantoj. Tio estas preskaŭ ĉiam ebla, post kiam oni redesegnis la bildojn.

Sed ĉar ambaŭ el ili devas esti sur la sama flanko de linio AB, la pruvo devas enteni la nocion de ordo.

Ni konsideru la sekvantan pruvon, kiu postulas, ke ĉiuj flankoj kaj ĉiuj anguloj estas strikte pozitivaj.

2.1 Internaj dusekcantoj

Komparante areojn en bildo 2, ni ricevas:

$$\Delta CAB = \Delta CAK + \Delta KAB$$
$$bc \sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2} bd \sin\alpha + \frac{1}{2} cd \sin\alpha$$

Sed ni scias ke $\sin\alpha \neq 0$, do

$$d = \frac{2bc\cos\alpha}{b+c}$$

Simile por dusekcanto de B ni ricevas:

$$d = \frac{2ac\cos\beta}{a+c}$$

Alivorte

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{ab+ac}{ab+bc} \tag{1}$$

Supozu, ke $a < b$ kaj $\alpha < \beta$ kaj la dekstra flanko estas malpli granda ol 1, kio estas kontraŭdiraĵo.

2.2 Eksteraj dusekcantoj

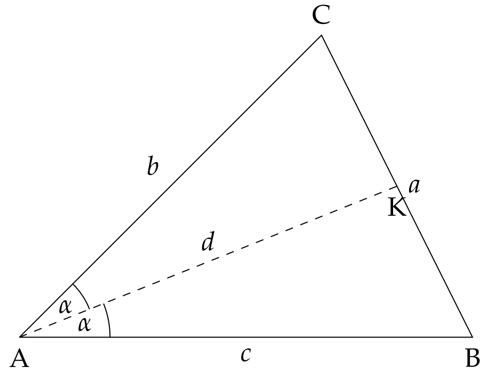
Ni lasu apliki la saman metodon al la eksteraj dusekcantoj, kiam bildo 3 rilatas. Ĉifoje komparinte areojn, ni ricevas

$$\Delta CAB = \Delta CAK - \Delta KAB$$
$$bc \sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} be \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \frac{1}{2} ce \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

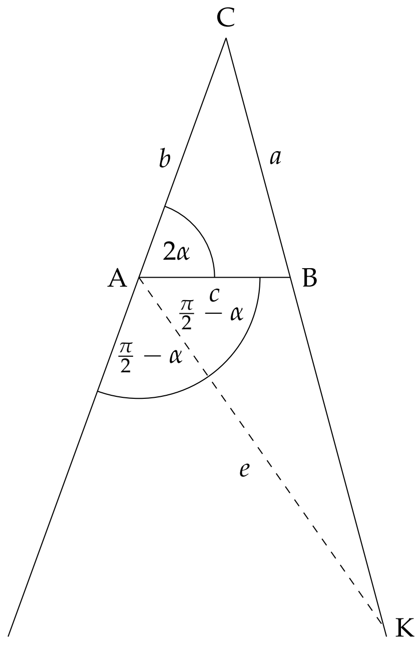
Farinte la saman kun angulo B kaj simpliginte la rezulton kiel antaŭe ni ricevas fine:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{ab-ac}{ab-bc} \tag{2}$$

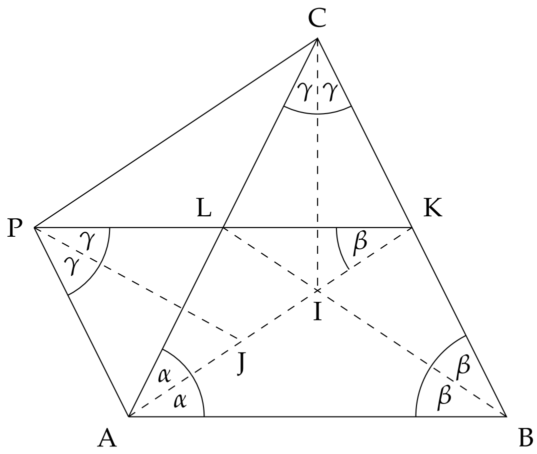
Denove la maldekstra kaj dekstra flanko de la egalaĵo kuŝas sur kontraŭaj flankoj de 1, krom se $a = b$ kaj la triangulo estas izocela.



Bildo 2: Internaj dusekcantoj



Bildo 3: Eksteraj dusekcantoj



Bildo 4: Rekta pruvo

2.3 Rekta pruvo

Mi promesis, ke mi donu rektan pruvon por la teoremo. Laŭ bildo 4 ni scias, ke ĉiuj tri internaj bisekcantoj en triangulo ABC intersekcas ĉe punkto I. Ni vidas, ke $AK = BL$. Ni povas konstrui $PAJK$ tiel, kiel ĝi estas kongrua kun $CLIB$, kun anguloj kiel montrataj. Do ni ricevas ke $PJ = CI$.

$\angle APK = \angle ACK$ kaj do $APCK$ estas enskribebla en cirklon, do $\angle CPK = \angle CAK = \alpha$ kaj $\angle JPC = \alpha + \gamma = \angle CIK$, ĉar $\angle CIK$ estas la ekstera angulo en triangulo CIA. Do la kvarlatero $IJPC$ estas enskribebla en cirklon.

Sed $PJ = CI$ de la konstruaĵo, do CP estas paralela al IJ, tio estas $CP \parallel AK$, do $\angle CPK = \angle AKP$ aŭ alivorte $\alpha = \beta$, kio pruvas la teoremon.

Mi lasos kiel ekzercon al la leganto ŝanĝi ĉi tiun pruvon por eksteraj dusekcantoj kaj malkovri kie en ĝi la nocio de ordo aperas.