# Elektitaj teoremoj pri la punktoj, kiuj determinas trilateron

JAN GÓROWSKI*, ADAM ŁOMNICKI†, JERZY ŻABOWSKI‡

## 1 Enkonduko

En la artikolo "La punktoj, kiuj determinas trilateron" [1] ni donis kelkajn ekzemplojn de tri punktoj ligitaj kun la trilatero $ABC$, kiuj determinas tiun trilateron. Du el tiuj punktoj estis la verticoj $A$, $B$ de tiu trilatero. Sube ni starigos kaj solvos pli interesajn kaj samtempe iom pli malfacilajn problemojn.

Ekzemplo:
Ni fiksu tri punktojn $X$, $Y$, $Z$, kiuj ne apartenas al unu rekto. Ĉu ekzistas tia trilatero, ke $X$, $Y$ estas ĝiaj verticoj kaj $Z$ estas ĝia ortocentro?

La solvo de tiu problemo kaj de kelkaj problemoj analogaj troviĝos sube.

## 2 La Teoremoj

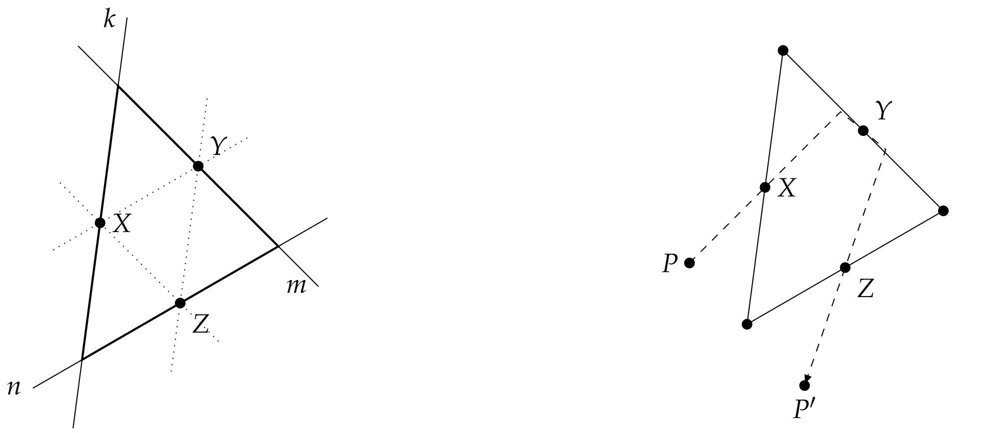
**Teoremo 1.** *Ni premisu, ke la punktoj $X$, $Y$, $Z$ ne apartenas al unu rekto. Ekzistas tiam tia trilatero, ke $X$, $Y$, $Z$ estas la mezoj de ĝiaj lateroj.*

*Pruvo unua.* Ekzistas nur unu rekto, al kiu apartenas $X$, paralela al la rekto $YZ$; ni nomu ĝin $k$. Ekzistas nur unu rekto, al kiu apartenas $Y$, paralela al la rekto $XZ$; ni nomu ĝin $m$. Ekzistas nur unu rekto, al kiu apartenas $Z$, paralela al la rekto $XY$; ni nomu ĝin $n$. Evidente $k \cap m$, $k \cap n$, $m \cap n$ estas aroj unuelementaj. La elementoj de tiuj aroj estas ĝuste la verticoj de tia trilatero, ke $X$, $Y$, $Z$ estas la mezoj de ĝiaj lateroj. □

De tempo al tempo dum matematikaj konkursoj por kapablaj lernantoj la aŭtoroj de la konkursaj taskoj estas surprizataj, ĉar inter la solvoj de konkursanoj aperas la rezonadoj unuavide strangaj kaj malĝustaj, kiuj post atenta analizo okazas tute bonaj, originalaj, kvankam samtempe malfacilaj. Sube ni prezentos tian malfacilan, duan pruvon de la teoremo 1. Redaktante tiun pruvon ni intence ne klarigas detale la paŝojn de la rezonado por montri tre vastajn eblecojn de la matematika edukado eĉ en mezlernejoj. Poste ni citos la teoremojn sur kiuj baziĝas tiu pruvo.

*Pruvo dua.* Ni fiksu la punkton $P$, ajnan punkton. Ekzistas nur unu punkto $P'$ egala al $(S_Z \circ S_Y \circ S_X)(P)$. La simbolo $(S_Z \circ S_Y \circ S_X)(P)$ priskribas la bildon de la punkto $P$ en kunligo de tri centraj simetrioj: $S_X$, $S_Y$, $S_Z$ (laŭvice).

*jangorowski@interia.pl
†alomnicki@poczta.fm
‡jerzy.zabowski@wlodkowic.pl




**(a)** pruvo unua **(b)** pruvo dua

**Bildo 1:** Ambaŭ pruvoj de teoremo 1

Se $P = P'$, tiam $P$ estas unu el la verticoj de la trilatero, kies ekzistecon ni celas pruvi. Se $P \neq P'$, tiam la mezo de la streko $PP'$ estas unu el la verticoj de tiu "serĉata" trilatero. Analogie ni povas trovi la punktojn $(S_Z \circ S_X \circ S_Y)(P)$, $(S_Y \circ S_Z \circ S_X)(P)$ kaj poste la duan kaj la trian verticon de la "serĉata" trilatero.

Rimarko: post la trovo (kiel supre) de unu vertico de la trilatero, kies ekziston ni celas pruvi, tre facile estas trovi du aliajn verticojn, ĉar la donitaj punktoj $X$, $Y$, $Z$ devas esti la mezoj de ĝiaj lateroj.

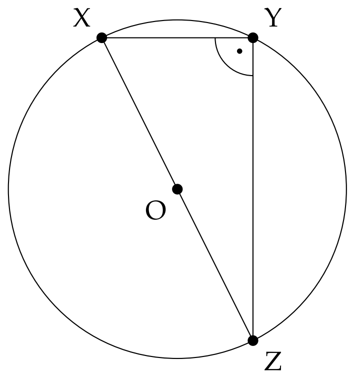
Ni alvenis tiel al la fino de la pruvo. □

Tiu dua pruvo baziĝas i. a. sur jenaj teoremoj:

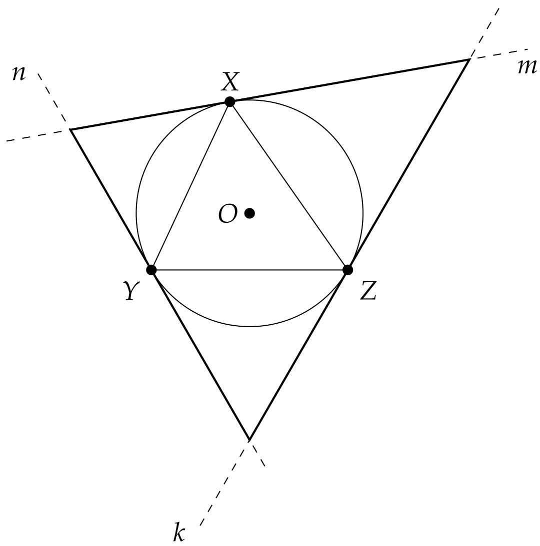
1. La kunligo de tri centraj simetrioj estas centra simetrio,
2. la centra simetrio $S_A$ havas nur unu konstantan punkton, t.e. $A$.

Evidente la unua pruvo de la teoremo 1 estas pli facila ol la dua. Sufiĉe ofte sur matematika kampo oni ricevas novajn teoremojn danke al la rezonado per analogio aŭ kuraĝaj konjektoj, post ŝanĝo de kelkaj premisoj. Sufiĉe ofte, sed ne ĉiam. Ni supozu, ke ni ŝanĝis en la teoremo 1 la vortojn "mezoj de ĝiaj lateroj" per la vortoj "la punktoj komunaj de ĝia enskribita cirklo kaj ĝiaj lateroj", aŭ per la vortoj "la komunaj punktoj de ĝiaj lateroj kaj dusekcantoj de ĝiaj anguloj". Ĉu ni ricevas teoremojn?

Se ekzemple $X$, $Y$, $Z$ estas la verticoj de orta triangulo $|\angle XYZ| = 90°$, (bildo 2), tiam ne ekzistas la trilatero tia, ke $X$, $Y$, $Z$ estas la punktoj komunaj de ĝia enskribita cirklo kaj ĝiaj lateroj. Ni supozu, ke tia trilatero $ABC$ ekzistas. Sekve la cirklo enskribita en $ABC$ estas samtempe ĉirkaŭskribita sur $XYZ$. Tiu ĉirkaŭskribita cirklo havas la centron $O$ (kiu estas la mezo de la latero $XZ$), la radiusojn $OX$ kaj $OZ$ ortajn al du lateroj de la triangulo $ABC$. El tio sekvas, ke tiuj du lateroj de la trilatero $ABC$ estas paralelaj. Tio ne estas ebla. La supozon, ke la trilatero $ABC$ ekzistas, oni do devas forĵeti. Same ne ekzistus la trilatero $ABC$, se $|\angle XYZ| > 90°$.




**Bildo 2:** Orta triangulo kun ĉirkaŭskribita cirklo

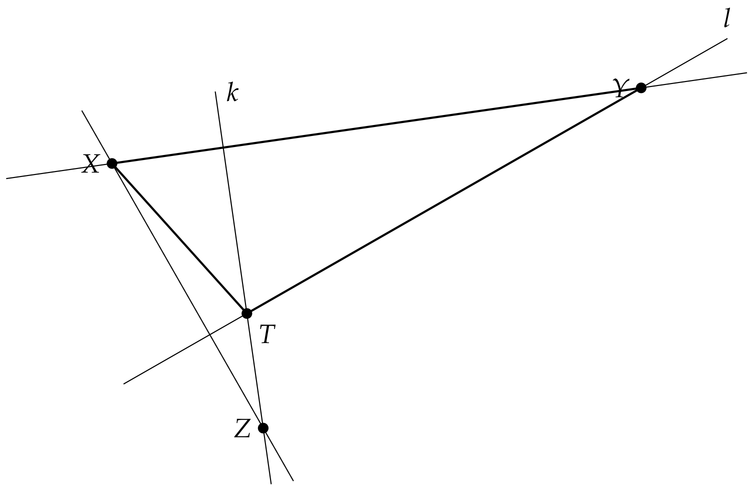



**Bildo 3:** Teoremo 2

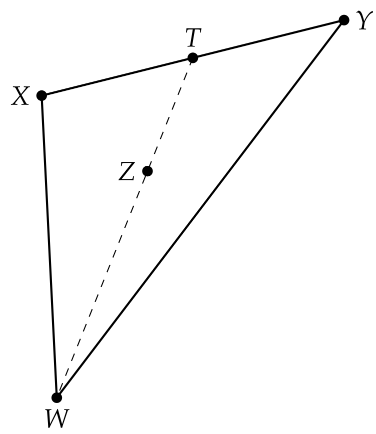
Ĉu tiu rezonado donas nenion? En similaj situacioj sufiĉas ion aldoni al premisoj aŭ iomete ilin ŝanĝi por ricevi matematikan teoremon. Tion ni faros kaj ricevos jenan teoremon.

**Teoremo 2.** *Ni premisu, ke la triangulo $XYZ$ estas akutangula (t.e. havas nur la angulojn malpli grandajn ol orta). Ekzistas tiam tia trilatero, ke $X$, $Y$, $Z$ estas la punktoj komunaj de ĝiaj lateroj kaj ĝia enskribita cirklo.*

*Pruvo.* Ekzistas nur unu cirklo ĉirkaŭskribita sur la trilatero $XYZ$; $O$ estu ĝia centro. Ekzistas nur unu rekto, al kiu apartenas $Z$, orta al la rekto $OZ$; ni nomu ĝin $k$. Ekzistas nur unu rekto, al kiu apartenas $X$, orta al la rekto $OX$; ni nomu ĝin $m$. Ekzistas nur unu rekto, al kiu apartenas $Y$, orta al la rekto $OY$; ni nomu ĝin $n$. La aroj $k \cap m$, $k \cap n$, $m \cap n$ estas aroj unuelementaj, ĉar neniuj du el la rektoj $k$, $l$, $m$ estas paralelaj. La elementoj de tiuj aroj estas la verticoj de la "serĉata" trilatero. $\square$




**Bildo 4:** teoremo 3



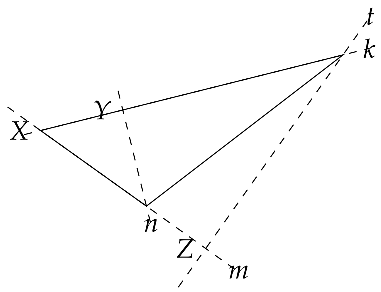

**Bildo 5:** Teoremo 4

**Teoremo 3.** *Ni premisu, ke la punktoj $X$, $Y$, $Z$ ne apartenas al unu rekto. Ekzistas tiam tia trilatero, ke $X$, $Y$ estas ĝiaj verticoj kaj $Z$ estas ĝia ortocentro.*

*Pruvo.* Ekzistas nur unu rekto, al kiu apartenas $Z$, orta al la rekto $XY$; ni nomu ĝin $k$. Ekzistas nur unu rekto, al kiu apartenas $Y$, orta al la rekto $XZ$; ni nomu ĝin $l$. Evidente la rektoj $k$ kaj $l$ ne estas paralelaj. Ilian komunan punkton ni nomu $T$. La trilatero $XYT$ estas tia, ke la punkto $Z$ estas ĝia ortocentro. □

**Teoremo 4.** *Ni premisu, ke la punktoj $X$, $Y$, $Z$ ne apartenas al unu rekto. Ekzistas tiam tia trilatero, ke $X$, $Y$ estas ĝiaj verticoj kaj $Z$ estas ĝia pezocentro.*

*Pruvo.* Ekzistas nur unu punkto, kiu estas mezo de la streko $XY$; ni nomu ĝin $T$. Ekzistas nur unu punkto $W$ sur la rekto $TZ$ tia, ke $\overline{ZW} = 2\overline{TZ}$ kaj tia, ke $Z$ troviĝas inter $T$ kaj $W$. La trilatero $XYW$ estas tia, ke $Z$ estas ĝia pezocentro. □




**Bildo 6:** Teoremo 5

**Teoremo 5.** *Ni premisu, ke la punktoj $X$, $Y$, $Z$ ne apartenas al unu rekto, $\angle YXZ \neq 90°$. Ekzistas tiam tia trilatero, ke $X$ estas ĝia vertico kaj $Y$, $Z$ estas la piedoj de la altoj de tiu trilatero, ligitaj kun du aliaj verticoj.*

*Pruvo.* Ekzistas nur unu rekto, al kiu apartenas $X$ kaj $Y$; ni nomu ĝin $k$. Ekzistas nur unu rekto, al kiu apartenas $X$ kaj $Z$; ni nomu ĝin $m$. Ekzistas nur unu rekto orta al $k$, al kiu apartenas $Y$; ni nomu ĝin $n$. Ekzistas nur unu rekto orta al $m$, al kiu apartenas $Z$; ni nomu ĝin $t$. La elementoj de la aroj $m \cap n$ kaj $k \cap t$, estas la du verticoj (diferencaj de $X$) de la trilatero, kies ekziston ni celis pruvi. □

# Bibliografio

[1] J. Górowski kaj A. Łomnicki. "La punktoj, kiuj determinas trilateron". En: *Scienca Revuo* 62.4 (2011), 265–267.