SCIENCA REVUO de Internacia Scienca Asocio Esperantista BEOGRAD, Jugoslavio

El Vol.24 n-ro 5(103) 20.10.1973.

PRI MATEMATIKO DE NIKOLAO KOPERNIK

/St. Gąska, TORUN, Pollando/

Laboro de ĉiu astronomo konsistas el du partoj:observado kaj plej ĝenerale komprenataj kalkuloj. El ĉi tiuj partoj konsistas ankaŭ la historio de astronomio, kiuj en ĉiu epoko reciproke kompletiĝis. La unuaj astronomiaj observoj rilatis precipe al pozicioj de astroj. Ĉar movoj de astroj okazas sur la "sfero", do iliajn poziciojn oni difinas per la angulaj grandecoj. Tiajn ĉi grandecojn oni ĝuste ricevas pere de tiaj aŭ aliaj instrumentoj. Por esplori reciprokajn variojn de astropozicioj,oni devas solvi antaŭ ĉio sferajn triangulojn. Por ricevi el iuj angulaj grandecoj la aliajn, oni devas havi: unue - nombrojn per kiuj estas prezentataj anguloj, nombrajn sistemojn kaj ankaŭ la operaciojn, kiujn oni rajtas realigi je tiuj nombroj. Tiun ĉi fakon antikvaj grekoj nomis logistiko kaj ni nomas ĝin aritmetiko. Due - rilatojn inter angulaj grandecoj, priskribantaj sferajn triangulojn, do ebenan kaj sferan geometrion kaj trigonometrion. Du supre menciitaj fakoj estis al Kopernik tre necesaj. Li mem en la enkonduko al volumo I de la verko "De Revolutionibus..." skribas:

"Kaj do se dignon de la sciencoj mi pritaksos laŭ ilia objekto, tiam senkompare plej elstara el ili estas tiu, kiun iuj nomas "astronomio", aliaj "astrologio", kaj multaj el malnovaj sciencistoj "pinto de matematiko". Kaj nenio estas miriga, se ĝuste ĉi tiu, estanta la kapo de liberaj sciencoj kaj la plej inda por noble pensanta homo, apogas sin sur preskaŭ ĉiuj partoj de matematiko: aritmetiko, geometrio, optiko, geodezio, mekaniko kaj kiuj ili ankoraŭ povas esti - ĉiuj konsistigas ĝin".

Ĉi-loke oni devas atentigi, ke Kopernik kiel astrologio komprenas ne aŭguradon, kiel ni nun komprenas ĝin, sed simple astronomion. El la citaĵo ne dusence rezultas, ke astronomion kaj pli ĝuste ĝian esplorobjekton - ĉielon - Kopernik admiris, eĉ raviĝis pri ĝi ("kio estas pli bela ol ĉielo, kiu ja ĉirkauprenas ĉion,kio estas bela" - skribis li en alia loko); sed li samtempe konfirmas ke ĝi apogas sin sur ĉiuj fakoj de matematiko. Li bone komprenis, ke sen kono de matematiko oni ne povas okupiĝi pri astronomio. Pro tio en ĉi tiu artikolo mi deziras prezenti Kopernikon kiel matematikiston. Oni skribas pri li, kiel pri tiu, kiu "haltigis sunon..", oni atribuas al li ekonomiajn traktatojn kaj rilate tion nomis lin ekonomiisto. Li ankaŭ estas konata kiel "militisto", ĉar li defendis la urbon Olsztyn antaŭ Kruckavaliroj. Oni ne forgesas pri lia kuracista agado, ankaŭ oni montras liajn poeziajn meritojn. Tamen oni forgesas pri tio, ke antaŭ ĉio li estis matematikisto, kiu apartenis al la tiutempa mondavangardo. Ŝajnas al mi, ke tio rezultas el nia pola antipatio al matematiko. Ĉe ni oni povas ne nur ne koni la matematikon, sed eĉ fieri pri tiu ignoremo. Ne estas troigo, se mi diros, ke se Kopernik ne estus matematikisto, li ne konstruus sian planedan sistemon. Matematiko, kiu ne agnoskas aŭtoritatojn, kiel neniu alia fako de scienco, permesis al li ataki tion,kio estis agnoskata kaj protektata de tiuj aŭtoritatoj kiel Eklezio.

Por paroli pri matematiko de Nikolao Kopernik, oni devas almenaŭ mallonge prezenti tion, kio estas farita en la teorio de kalkulado kaj ankaŭ en geometrio kaj trigonometrio ĝis la tempo de Kopernik. Mi prezentas tion en la unua ĉapitro.

En la dua ĉapitro mi prezentas la trigonometrion prilaboritan de Kopernik. Precipan atenton mi turnas al lia prilaboro de sinustabelo, kiu estis necesa al Kopernik por solvado de trianguloj. La metodojn de triangulsolvo mi prezentas pro la malmulta loko,pli supraĵe. Ĉe la fino mi prezentas en maksimuma mallongigo , influon de astronomio je matematiko post Kopernik.

MALLONGA SKIZO DE MATEMATIKHISTORIO

Pri matematiko ni povas paroli ek de momento, kiam oni demandis unue "kiom" kaj poste "kial". Tiun momenton oni ne povas precize indiki, same kiel oni ne povas indiki, kie kaj de kiu tiuj demandoj estis faritaj. Kun ekonomia evoluo de la primitivaj popoloj sekvis ankaŭ disvolvo de la komerca interŝanĝo inter ili, kaj tio en plua konsekvenco kreis bezonon de notado pri kvantoj kaj fikso de iuj simboloj. Tiuj unuaj simboloj estis ekzemple:entranĉaĵo sur peco de ligno aŭ nodoj sur ŝnuro. Tia entranĉaĵo prezentis la objekton aŭ unuon de mezuro sendepende de tio, ĉu estis tio besto , vazo aŭ porcio da greno.

Ekonomi-komercaj bezonoj postulis pli precizajn notilojn kaj nombran sistemon. Plej verŝajne unuaj skribitaj nombrosignoj estis egiptaj hieroglifoj. Oni prilaboris ilin jam kelkajn jarmilojn antaŭ nia erao. Tiu ĉi sistemo baziĝis sur la respektiva grupado de strekoj por la nombroj ekde unu ĝis 9. Dekojn oni registradis per la konforma grupigo de la signo ∩ . Por signi la nombron 100 - oni

uzadis signon ᑫ , kiu simbolis la mezurilon kaj 1000 - ☬ - ĝermo de lotoso. 10 000 estis rano, ĉar ranoj estis unu el la dek egiptaj plagoj (kaj tiom granda nombro kiel 10 000 jam estas plago). Nombron 222 en la egipta sistemo ni povas skribi jene:

ᑫᑫᑫᑫ||

La greka nombrosistemo estas litera. En ĝi la unuaj naŭ literoj de alfabetoj estis uzataj por signado de la nombroj 1-9. La plua naŭo estis dekoj: 10-90 kaj lastaj naŭ literoj estis centoj:100-900. Mil estis denove unua litero de alfabeto: α . Nur pli poste oni komencis aldonadi komon ĉe litero α', por distingi 1000 de 1. La menciita antaŭe nombro 222 en la greka sistemo aspektus jene: σλβ (sigma, lambda, beta).

La roma nombrosistemo estas en iu senco retroira kompare kun la pli frua babilona sistemo. Ĝi apartenas al miksaj sistemoj; troviĝas en ĝi simboloj kaj literoj. Novaĵo en tio estas apliko de adicio kaj subtraho, ekzemple kvar (IV) estas kvin (V) minus unu (I) ; kaj ses (VI) estas kvin (V) plus unu (I). Ĝenerale - el la maldekstra flanko oni subtrahas kaj el la dekstra oni adicias.

El nia vidpunkto la plej interesa estas babilona sistemo pro tio, ke laŭ ĝi estas modelita nia decimala sistemo. Prilaborita je tri mil jaroj antaŭ nia erao, la babilona sistemo signife superas la antaŭe priparolitajn. Ĉiun nombron oni notas en tiu sistemo nur per du signoj - la vertikala kojno V kaj la horizontala < . Ĝia dua eco estas ke ĝi baziĝas sur la sesdeka sistemo. La nombrojn 1-9 oni en tiu sistemo skribis per konforma frupigo de la vertikalaj kojnoj (V). Dek estas horizontala kojno (<), 59 do estas

<<<<< VVVV

60 estas - V - denove vertikala kojno (same kiel unuo). Donita en la antaŭa ekzemplo nombro 222 skribiĝos kiel

VVV<<<< VV

(legu: tri sesdekoj kaj kvardek du unuoj). Ni vidas laŭ tiu ĉi ekzemplo, ke valoro de simbolo dependas de la loko kiun ĝi okupas en iu nombro. Ĉi tiujn sistemojn oni nomas poziciaj. La plej granda malavantaĝo de la sistemo estas manko de nulo (tio ankaŭ koncernas la sistemojn antaŭe priparolitajn). Tiu fakto ofte kaŭzas malfacilaĵojn en relegado de la malnovaj babilonaj skribaĵoj. Ekzemple nombro VVV povas signifi tri kaj ankaŭ sesdekdu. Enkondukita en pli posta periodo signo ♠ por dividi unuojn de pli alta kategorio de pli malalta (ekzemple tri es as VVV , sesdek du estas V♠VV , ĝi forigis la miskomprenon, sed nen iam oni uzis tiun signon ĉe la fino de nombro, por diferencigi 1 (V) de 60 (V) aŭ de 3600 (V).

Kiel ni supre menciis, la bazon de nia decimala sistemo oni serĉas ĝuste en la babilona "sesdek"-sistemo.

Kreis ĝin tamen ne babilonanoj sed hindoj. Kiam en Eŭropo ĉe la fino de la V jc. de nia erao, post disfalo de la Roma Imperio, sekvis intelekta krizo, tiam en Hindujo komenciĝis rapida evoluo de scienco kaj arto.

Precipe forte evoluas matematiko kaj astronomio. Sekvante sesdekan babilonan sistemon ili prilaboris la decimalan pozician sistemon. Simile kiel en antaŭa sistemo, ĉi tie ankaŭ valoro de simbolo dependas de la loko kiun ĝi okupas en iu nombro. Tamen ili faris ion pli. Ili enkondukis nulon. La preciza dato de tiu ĉi koncepto

ne estas konata, tamen oni supozas ke tio okazis en la V. aŭ VI.jc. de nia erao, ĉar en tiu tempo vivis kaj laboris la plej elstaraj hindaj matematikistoj, kiel: Aryabhata (naskiĝis ĉirkaŭ la 500.j.) kaj Brahmagupta (ĉirkaŭ la 625. jaro), kiuj siajn studojn koncentris antaŭ ĉio je aritmetiko. Eltrovo de nulo estis verŝajne kunligita kun la astronomiaj laboroj kaj atingoj de hindoj, ĉar la astronomio postulas grandajn nombrojn. Estas eraro nomi la unuan decimalan sistemon araba. Araboj estis nur perantoj en ĝia transporto el Hindujo al Eŭropo. Precizan priskribon de tiu ĉi sistemo donis la vivanta en la deka jarcento arabo Al Chwarzimi. Liaj laboroj estis en la XII. jc. latinigitaj de la angla filozofo kaj vojaĝanto Adelard el Bath. Tamen plej multe meritis por la adapto de la hinda sistemo por eŭropanoj Leonardo el Pizo (pli konata kiel Fibonacci). En la jaro 1202. li verkis libron titolitan "Liber Abaci"; en ĝi li komunikis principojn de operacioj kun la decimalaj nombroj kaj uzmanieron de nulo. Estis do en la XIII.jc. objektivaj kondiĉoj ebligantaj ekkonon de tiu sistemo. Tamen ekestis alispecaj kaŭzoj kiuj bremsis tiun procezon ĉar muzulmanoj estis konsiderataj kiel paganoj, sekve ĉio, kio kun ili ligiĝis estis konsiderata kiel koncepto de satano. Tio koncernis ankaŭ la decimalan sistemon.

En la jaro 1299. oni eldonis en Florenco malpermeson uzadi la hindajn nombrojn. En unuaj tradukoj de arabaj skribaĵoj,tabeloj kaj nombroj restis senŝanĝaj. Kiam oni anoncis supremenciitan interdikton, tabeloj kaj nombroj estis transskribitaj laŭ la latina sistemo. Pro tio ankoraŭ en la XVII.jc. latinaj ciferoj estis universale uzataj. Tamen oni povas supozi, ke inter scienculoj kono de la hindaj ciferoj estis universala jam en fino de la XV.jc. Estas sufiĉe interesa, ke N. Kopernik en sia laboro uzadis latinajn ciferojn aŭ priskribis ilin per vortoj. Sed tamen kalkulojn li faris per la hindaj ciferoj. Oni devas ĉi tie rimarki, ke principoj de la adicio kaj subtraho en la decimala sistemo estis prilaboritaj sufiĉe frue. Male, principojn de la multipliko kaj divido ni havis dank' al eŭropanoj. Ankoraŭ en la XVI.jc. dividadon oni traktis kiel grandan arton, ekzemple Melanchton havis specialajn lekciojn pri dividado en la virtemberga universitato. Kiel daton de enkonduko de la negativaj nombroj oni povas akcepti la jaron 1545., kiam G. Cardano eldonis sian "Ars Magna", en kiu li eksplikis principojn de ilia uzado.

Se temas pri frakcioj, egiptanoj, babilonanoj kaj ankaŭ grekoj konis nur la fundamentajn frakciojn. Kvankam en la VI.jc. Brahmagupta prilaboris multiplikregulojn por frakcioj, sed tamen, je definitiva prilaboro de iuj operacioj oni devis atendi ĝis la XVII.jc. Enkonduko de la decimalaj frakcioj, estas merito de Simon Stevin (1548-1620). Oni povas diri ĝenerale, ke en la tempo de Kopernik la kono de frakcioj estis limigita ĝis la fundamentaj frakcioj.

*
* *

Je la fino de tiuj konsideroj pri nombroj kaj nombraj sistemoj ni kunmetas en tabeloj priparolitajn nombrajn sistemojn kaj ilian skribmanieron.

Jen la tabelo:

hinda	egipta	babilona	greka	roma
1	I	V	α	I
2	II	VV	β	II
3	III	VVV	γ	III
4	II II	VV VV	δ	IV
5	III II	VVV VV	ε	V
6	III III	VVV VVV	ζ	VI
7	IIII III	VVV VVV V	η	VII
8	III III II	VVV VVV VV	θ	VIII
9	III III III	VVV VVV VVV	ι	IX
10	∩	<	κ	X
11	∩I	<V	κα	XI
20	∩∩	<<	λ	XX
50	∩∩∩ ∩∩	<<<<<	ξ	L
60	∩∩∩ ∩∩∩	V	ο	LX
100	e	V<<<<	τ	C
1000	☿	<VVV VVV<<<<	α	M

La naskiĝjaron de Nikolao Kopernik oni povas skribi jene:

hinde 1473

egipte ☿ e e ∩∩∩∩ III
Δ e e ∩∩∩

babilone << VV << V V V
VV

greke αλπγ

rome MCDLXXIII

T R I G O N O M E T R I O

Dua, krom la nombro, fundamento de matematiko, precipe grava en niaj konsideroj, estas geometrio kaj ĝia pli juna frato trigonometrio. Unuajn sciencajn fundamentojn de geometrio donis grekoj iranta de la demando "kiel" ĝis la demando "kial". Ja egiptanoj, same kiel babilonanoj, ne starigis la duan demandon, sed donadis nur receptojn kiel solvi tiujn aŭ aliajn taskojn. Kiel patro de la greka matematiko oni opinias Taleson el Milet (640-546. jaro a.n.e.). Li estas ne nur la aŭtoro de kelkaj teoremeoj, sed ankaŭ de iliaj pruvoj. Dank' la disĉiplojn de Pitagoro fronte kun li mem, la greka matematiko elfluis al larĝa akvo. Al Platona Akademio, sur kies pordo estis la surskribo) "Ne eniru tiu kiu ne konas geometrion", dank'al la laboro de analitika metodo por pruvoj de geometriaj teoremoj kaj ankaŭ kvalifikon de tiuj ideoj kiel: punkto, rekto, ebeno kiel originaj ideoj. Pro malfacilaĵoj kiujn renkontis la greka matematiko ,

post malkovro de neracionalaj nombroj (precipe $\sqrt{2}$) disĉiploj de Plato diferencigis sciencon pri nombroj de la kalkulado kaj de geometrio de mezurado.

Ili mem okupiĝis antaŭ ĉio pri la nombroscienco kaj pri geometrio. Tipa metodo por tiu periodo estis prezentado de ekz.volumeno de unu figuro per volumeno de alia, sen informo pri la kalkulmetodo. Ekzemple Endoksos el Knidos (408-355 j.a.n.e.) pruvis, ke volumeno de konuso egalas trionon da cilindro kun la samaj bazo kaj alteco, sed li ne montris kiel ilin kalkuli.

En la jaroj ĉirkaŭ 365-300 a.n.e. vivis kaj laboris unu el la plej grandaj matematikistoj de ĉiuj tempoj - E ŭ k l i d o. Lia verko titolita "Elementoj" estis la plej ofte eldonata libro en la mondo. Ĝi akiris ĉirkaŭ mil eldonojn. Pro ĝia escepta signifo kaj pro tio ke el ĝi lernis Kopernik, necesas almenaŭ nelonge priparoli ĝian enhavon. "Elementoj" konsistas el dek tri volumoj. La unuaj kvar volumoj rilatas al ebena geometrio. Ili entenas fundamentajn problemojn koncernantaj liniojn, angulojn kun ilia kongrueco de areoj,divido de abscido, cirklo kaj regulaj poligonoj. En la V-a volumo estas teorio de Endoksos pri nekunmezurebloj en ĝia geometria formo. La VI. volumo estas adapto de tiu teorio al trianguloj. La volumoj VII kaj VIII prezentas la teorion de nombroj, ekzemple divideblecon de entjeroj. Nenion oni diras pri kalkulmetodoj. En la volumo IX li skribis pri dismeto je la primaj faktoroj. La teorion de kvadrataj neracionalaĵoj li donis en la volumo X. En la volumoj XI, XII ,XIII li prezentis atingojn de la sfera geometrio, ekzemple ecojn de sferanguloj, volumenojn de paralelopipedoj, prismoj kaj piramidoj.

Kiel el la supra trarigardo sekvas, la enhavo de "Elementoj" estas tre larĝa. Tamen vane ni serĉus en ili indikojn rilatantajn al apliko de enhavantaj en ili rezultoj. Mankas eĉ tiel fundamenta grandeco kiel rilato inter cirkonferenco kaj diametro de zono, t.e. la nombro π. Ankau mankas iu ajn indiko pri difinado de volumenoj,kvankam tre multe li skribas pri rilatoj de iliaj volumenoj. Malgraŭ tiuj mankoj, "Elementoj" estis libro, kiu plej multe influis multajn generaciojn de matematikistoj. Ankoraŭ hodiaŭ plimulto de geometrio kiun ni lernas en la elementa lernejo, baziĝas je unuaj sep volumoj de "Elementoj". Necesas ĉi tie substreki, ke klopodoj, kiujn havis grekaj matematikistoj kun neracionalaj nombroj, respeguliĝas reduktitaj je geometria formo. Ekz. esprimo $\sqrt{A}$ ne estas radikalo de nombro A, sed estas traktata kiel latero de kvadrato kun areo A. Aritmetiko de Eŭklido okupiĝis pri entjeroj kaj pri rilatoj inter ili.

Pri Eŭklido oni diras, ke li estis dirinta al la reĝo Ptolomeo I, ke por geometrio ne ekzistas reĝa vojo, kiam tiu demandis lin ĉu ne estas alia vojo al ekkono de geometrio, ol tiu kiu estas en "Elementoj".

La sekvonta granda matematikisto kaj ankaŭ fizikisto - estis A r ĥ i m e d o (278-212 j.a.n.e.). Li estis iusence kontraŭeco de Eŭklido. En siaj esploroj li ne limigis sin al t.n. pura scienco, sed li metis pli grandan akcenton je praktika flanko. Aproksimante cirkonferencon per regulaj naŭdekseslateroj, enskribitaj kaj ĉirkaŭskribitaj je ĝi, li konstatis ke rilato inter cirkonferenco kaj la diametro troviĝas inter $3\frac{1}{10}$ kaj $3\frac{1}{7}$. Dank' al li, ni konas formulon por la areo de sfero kiel kvarobla areo de ĝia granda cirklo, same

ankaŭ formulon por la volumeno de globo. Li ankaŭ finfaris formulojn por la areo kaj volumeno de cilindro kaj de sferoĉapo. La supre menciita estas nur parto de liaj atingoj. Kiam roma armeo konkeris urbon Sirakuzo, li pereis trapikita per glavo, petante soldaton ke li ne neniigu geometriajn figurojn kiujn en tiu momento li studis.

Tiamaniere mi atingis la trian kaj samtempe lastan matematikiston de t.n. helena epoko. Tiu estis A p o l o n i o el Perga (260-160 j.a.n.e.). Simile kiel Eŭklido, li okupiĝis pri la pura scienco. Li enkondukis elipson, parabolon kaj hiperbolon kiel ebenajn sekcojn de la konuso. Nomoj de tiuj kurboj, donitaj de Apolonio, estas kunligitaj kun ecoj de iliaj areoj. Parabolo signifas transformon, elipso transformon kun malsuperfluo kaj hiperbolo transformon kun superfluo.

En ombro de tiuj granduloj vivis kaj laboris aliaj matematikistoj kiuj eble malpli okupiĝis pri la pura matematiko, tamen iliaj meritoj en la praktikaj aplikoj estis grandegaj. Ekz. Eratosteno - prekursoro de la matematika geografio. Lia merito estas unua kalkulo de la terradiuso. Li ankaŭ donis metodon por registro de ĉiuj primoj, la t.n. kribrilo de Eratosteno.

En tiu momento ni atingas tre interesan fenomenon. Dum ĉe la fino de II.jc.a.n.e. sekvas malapogeo de la greka matematiko, komenciĝas disvolviĝo de astronomio. Iom pli frue, ĉirkaŭ la 280.j.a.n.e., A r y s t a r h o s el Samos prezentas sian suncentran teorion pri konstruo de planedsistemo. En la jaroj 190-125 a.n.e. vivas H i p a r h o el Niceo, konsiderata kiel kreinto de fundamentoj de astronomio. Liaj verkoj formas pli grandan parton de prilaborita post tri jarcentoj fundamenta verko de tiutempa astronomio "Almagest" de Ptolomeo. Al li ni dankas enkondukon de ideoj pri geografiaj latitudo kaj longitudo kaj de astronomiaj metodoj por ilia kalkulado. Ŝajnas, ke li enkondukis en astronomion ankaŭ ekscentrajn cirklojn kaj epiciklojn por klarigi observatajn moviĝojn de astroj. Verŝajne li kreis ankaŭ fundamentojn de trigonometrio.

La regreso de la greka matematiko troviĝis en ĝia esenco. Unuflanke manko de kontentiga teorio pri nemezureblaj grandecoj kaŭzis interrompon inter la aritmetiko kaj geometrio. Laŭ alia flanko, primitiva nombra sistemo malebligadis evoluon de aliaj fakoj de matematiko, ekz. algebro. Ĝuste tial sekvis ĝia disigo de la praktiko, kaj tio kaŭzis ke malaperis socia bezono je ĝiaj rezultoj. Aparte - nas al tiu grupo: Nikomaho el Gerasa (ĉirkaŭ la 1000-a jaro de nia erao), lia samaĝulo Menelao kaj la plej granda geometriisto de tiu tempo H e r o n o (la unua jarcento de nia erao).

Oni povas diri ke ili okupiĝis pri tio kio ne estis en la "Elementoj" de Eŭklido.

En la II-a jarcento de nia erao vivis kaj verkis P t o l o m e o, kreinto de la geocentra sistemo de la mondo. En verko konata sub la araba titolo: "Almagest", li kolektis kaj prezentis ne nur astronomiajn atingaĵojn de liaj samlandanoj, sed ankaŭ la necesajn scionjn pri matematiko, precipe pri linia geometrio kaj trigonometrio. Por faciligi kalkulon pri pozicioj de astroj, li faris tabelojn, kiujn ni hodiaŭ nomus: sinustabeloj, por anguloj ekde 0° ĝis 180°.

Oni devas substreki, ke "Almagest" dum preskaŭ 1400 jaroj, t. e. ĝis la tempo de Kopernik, estis "biblio de astronomio". Ptolomeon oni devas konsideri kiel matematikiston-praktikulon. Lia matematiko, prezentita en "Almagest", estis fakte kolekto de reguloj por solvado de ekzemplotaskoj, kaj ne teoremoj kun pruvoj.

Ĉar romanoj nenion kontribuis al matematiko, Kopernik disponis antaŭ ĉio tion, kio estis en "Elementoj" de Eŭklido kaj "Almagest" de Ptolomeo kaj li nur ilin mencias.

"DE LATERIBUS ET ANGULIS"

En la jaro 1542, do unu jaron antaŭ apero de la granda verko de Nikolao Kopernik, dank' al penoj de la juna matematikisto J. Rheticus (1514-1576) estis presita negranda libreto titolita "De lateribus et angulis", kies aŭtoro estis ankaŭ N. Kopernik. Kiel kuriozaĵon oni povas ĉi tie komuniki, ke Rheticus alvenis al Frombork februare en la jaro 1542. Sed en la vatikana biblioteko troviĝas ekzemplero de la libreto kun dediĉo de Rheticus, devenanta de julio de la sama jaro.

Tiu ĉi malgranda, nerimarkebla libreto estas la dua eŭropa lernolibro de trigonometrio. La unua estis trigonometrio de Regiomontan (1436-1476), kiu aperis en la j. 1533. La tempa anticipo estas kaŭzo ke kelkaj aŭtoroj, skribantaj pri Kopernik, sugestas, ke li skribante sian trigonometrion baziĝis je trigonometrio de Regiomontan. Profesoro B. Birkenmajer, en sia granda monografio, rilatanta vivon kaj agadon de N. Kopernik, refutas tiujn sugestojn per kvar pruvoj:

1. Kopernik povis konatiĝi kun la trigonometrio de Regiomontan nur post la j. 1533, ĉar ĝis tiu ĉi tempo ĝi estis en formo de manuskripto en la posedo de J. Shoner kaj eĉ ne unu kopion el ĝi oni faris. En la biblioteko de N. Kopernik troviĝas ekzemplero de tiu ĉi trigonometrio, sed ĝin donacis al Kopernik Rheticus, kiam li alvenis al Frombork en la j. 1539. De tio oni konkludas, ke nur tiam li povis ĝin ekkoni.

2. Kopernik ekkonis ĝisfunde trigonometrion studante en Krakovo kaj aŭskultante modernajn lekciojn.

3. La fonto de la kopernika trigonometrio estis ekstrakto el la verko "Almagest" de Ptolomeo. La ekstrakton preparis pli frue Pauerbach (volumoj I-VI) kaj Regiomontan (volumoj VII-XIII) kaj nomis ĝin "Epitomat". Ĝi estis publikigita en la j. 1496 kaj estis en la posedo de Kopernik ek de la 1497.j. Oni devas mencii, ke "Almagest" mem en la dekdujarcenta traduko de Kremonano estis publikigita en la j.1515. La trigonometrio de Kopernik diferencas de la trigonometrio prezentita en "Almagest" kaj "Epitomat" antaŭ ĉio per tio, ke anstataŭ tendenojn ĝi uzas la nocion de sinuso, ne uzante tiun ĉivorton sed aplikante la priskriban manieron "duono da tendeno la duobligita arko" (dimidium subtendentis duplae circumferenciae).

4. La trigonometrio de Kopernik, kiu estis nur ilo en lia laboro, devis ekesti antaŭ la j.1512, ĉar en tiu ĉi tempo la heliocentra

sistemo, en ĝenerala skizo, jam estis konstruita. Konsiderante la fakton, ke Kopernik kalkuladis la tabelojn de sinuso, la tempon de ekesto de la trigonometrio oni devas deloki ankoraŭ kelkajn jarojn malantaŭen.

Post tiuj ĉi enkondukaj konsideroj ni okupiĝu pri la trigonometrio mem. Kiel ni supre menciis, ĝi estis publikigita unuafoje en la formo de aparta libreto. En "De revolutionibus orbium caelestium" ĝi okupas ĉapitrojn XI,XII,XIVde la I-a volumo. Prilaborante ĉi tiun referaĵon ni baziĝis precipe je la traduko "De revolutionibus.." de profesoro J. Baranowski (1854). De tiu ĉi traduko ni ĉerpis citaĵojn. En enkonduko al la ĉapitro XI Kopernik skribas: "Argumentoj, kiujn preskaŭ en la tuta verko ni uzos, reduktiĝas al rektoj, arkoj kaj arkaŭ al la ebenaj kaj sferaj trianguloj, kiuj sufiĉe multaj jam estas en "Elementoj" de Eŭklido, tio tamen ne ampleksas tion, kion ĉi tie ni pleje deziras, nome: kiamaniere oni povas atingi el anguloj laterojn kaj el lateroj angulojn" kaj plue, jam en la ĉapitro XII-a: "Pro tiuj kaŭzoj ne estos malbone, se pri tiuj ĉi linioj ni parolos, same pri lateroj kaj anguloj de la ebenaj kaj sferaj trianguloj,kiujn Ptolomeo kelkloke prezentis en ekzemploj, por jam ĉiloke faciligi kaj komprenigi prezentotajn pruvojn". Cirkonferencon, laŭ la ĝenerala kutimo de matematikistoj, ni dividas je 360 gradoj. Antikvuloj konvenciis diametron divideblan je 120 partoj. Sed poste, evitante enkondukon de frakcioj en multiplikadon kaj dividadon de nombroj rilatantaj al linioj, kiuj kutime estas nekunmezureblaj, ili pli ofte prenis kiel diametron la kvadraton de tiu ĉi nombro iuj 120 000 partojn kaj aliaj 200 000, aliaj akceptis alimaniere determinitan diametron ek de tiu tempo, kiam en uzadon estis enkondukitaj la hindaj signoj de nombroj, kiuj, pro preciza mallongigo en operacioj, superas ĉiujn aliajn ĉu la grekajn, ĉu la latinajn, kaj en ĉiuspeca kalkulo plej bone taŭgas. Ni ankaŭ, pro tiu ĉi kaŭzo, akceptis por la diametro 200 000 egalajn partojn, kiel sufiĉaj por eviti videblajn erarojn".

En tiu ĉi, eble iom tro longa, citaĵo ni permesis al Kopernik mem argumenti celon kaj metodon de lia trigonometrio, klarigi kial li akceptis kiel diametron tian kaj ne alian grandecon kaj pritaksi la hindan nombrosistemon, ĉar ni opinias, ke li mem faris tion plej bone.

Ĉi tiu ĉapitro enhavas ses teoremojn kaj unu kalkultaskon. La I-a TEOREMO diras ke, se estas konata la diametro de cirklo, eblas kalkuli laterojn:

de triangulo (a_3), kvadrato (a_4), sesangulo (a_6),

kvinangulo (a_5), kaj de dekangulo (a_{10})

enskribitaj en la cirklon. Ĉi tiun teoremon li uzas post akcepto el "Elementoj" de Eŭklido, ke la kvadratlatero de triangulo, enskribita en cirklon, egalas kvadratlateron de sesangulo, multiplikata per tri, tio estas

$$a_3^2 = 3a_6^2 \quad \text{kaj simile} \quad a_4^2 = 2a_6^2$$

Poste, per konvenaj funkcioj inter jam ricevitaj lateroj de kvinangulo kaj dekangulo, enskribitaj en cirklon, li prikalkulas iliajn laterojn; t.e. a_5 kaj a_{10}. Por $a_6 = 100\ 000$ li ricevas

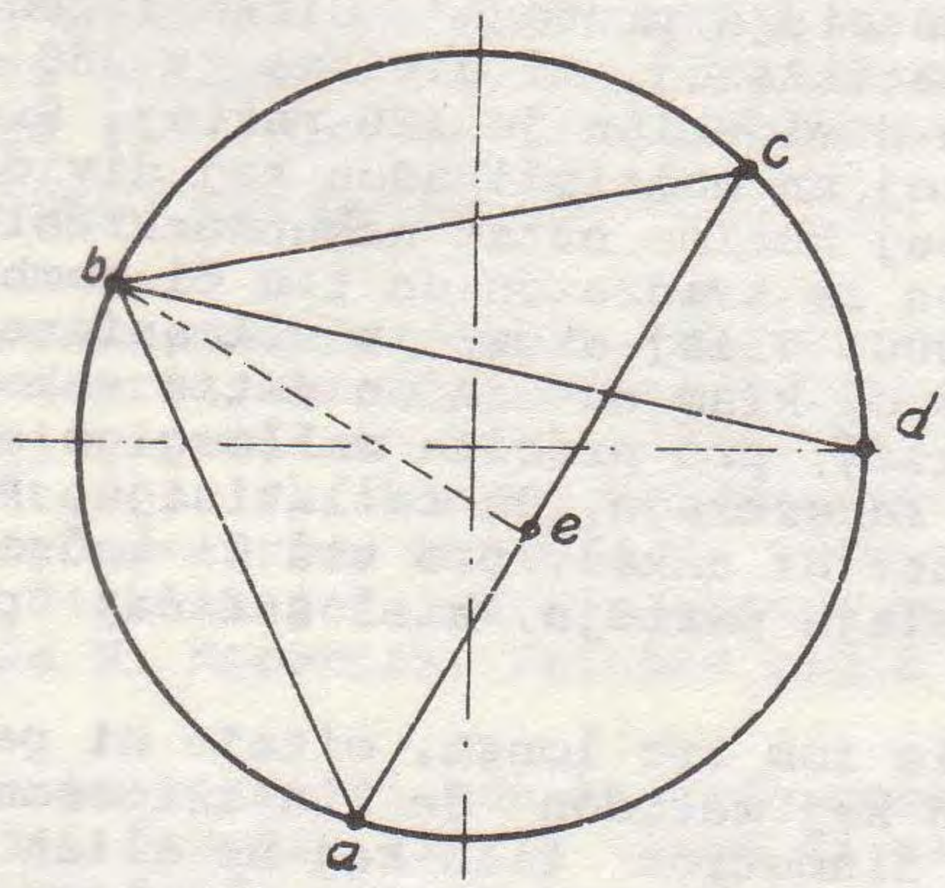
$$a_3 = 173205,\ a_4 = 141222,\ a_5 = 117557,\ a_{10} = 61803 \text{ kaj}$$

$$a_{12} = 50000.$$

Kiel konsekvencon de tiu ĉi teoremo li montras, ke se estas donita la tendeno rilatanta al iu arko, tiam povas ankaŭ prikalkuli la tendenon de arko, kiu kune kun la antaŭa egalas duoncirklon. La pruvon li faras per la teoremo de Pitagoro por ortangulo bazanta sur la diametro. Li ilustras tion per la ekzemplo de dekangullatero, kiu estas tendeno por angulo de 36 gradoj kaj prikalkulas tendenon de arko rilatanta al 144 gradoj.

La II-a TEOREMO (t.n. Ptolomea teoremo): "En la kvarlatero enskribita en cirklon la du diagonaloj egalas la sumon de ortanguloj el kontraŭkuŝantaj lateroj".

Pro tio ke Kopernik ofte uzas tiun ĉi teoremon por pruvi la pluajn asertojn, ni prezentos ĉi tie la pruvon en formulo de Kopernik kaj ankaŭ en la nuntempa formo: "Estu la kvarlatero a b c d enskribita en cirklon; mi diras, ke kvarangulo el diagonaloj a c kaj b d egalas ortangulojn el lateroj a b kaj c d kaj ankaŭ ad kaj bc.



des. 1

Por pruvi tion ni streku la angulon a b e egalanta angulon c b d: adiciante al la ambaŭ la angulon c b d, la tuta angulo a b d egalos tutan angulon e b c. La anguloj a c b kaj b d a, kiel apogitaj sur la sama segmento de la cirklo, estas reciproke egalaj; do ankaŭ la ceteraj anguloj - tio estas b e c kaj b a d - ankaŭ reciproke egalas, tial la trianguloj b c e kaj b d a kiel egalanguloj havos la proporciajn laterojn, do b c rilatas al latero b d kiel ec al ad, tial la ortangulo b c kaj a d egalas rektangulon e c kaj b d. Ĉar ankaŭ du trianguloj a b e kaj c b d estas konformaj, tial ke ili havas la angulojn a b e kaj c b d egalaj pro la konstruo kaj anguloj b a c kaj b d c ankaŭ estas egalaj kiel apogitaj sur la sama arko, tial la latero a b rilatas la lateron b d kiel a e rilatas c d, do rektangulo el a b kaj c d egalas la rektangulon el b d kaj a e, ĉar ni montris , ke la rektangulo el a d kaj b c egalas la rektangulon el b d kaj a c, do, post la sumigo, estos: la rektangulo el b d kaj a c egalas la rektangulojn el a d c b kaj a b c d ; kio estis necesa por la pruvo".

Tiu ĉi komplika pruvo en moderna formo prezentiĝas jene:

Tezo: $ac \cdot bd = ab \cdot cd + ad \cdot bc$

Pruvo. $\sphericalangle abe = \sphericalangle cbd$
$\sphericalangle ebd = \sphericalangle ebd$
$\sphericalangle abd = \sphericalangle cbd + \sphericalangle ebd$
$\sphericalangle acd = \sphericalangle bda$
$\sphericalangle bec = \sphericalangle bad$ de tie;
$\Delta bce \sim \Delta bda$

$\frac{bc}{bd} = \frac{ce}{ad}$ sed ankaŭ $\Delta abe \sim \Delta cbd$, de tie;

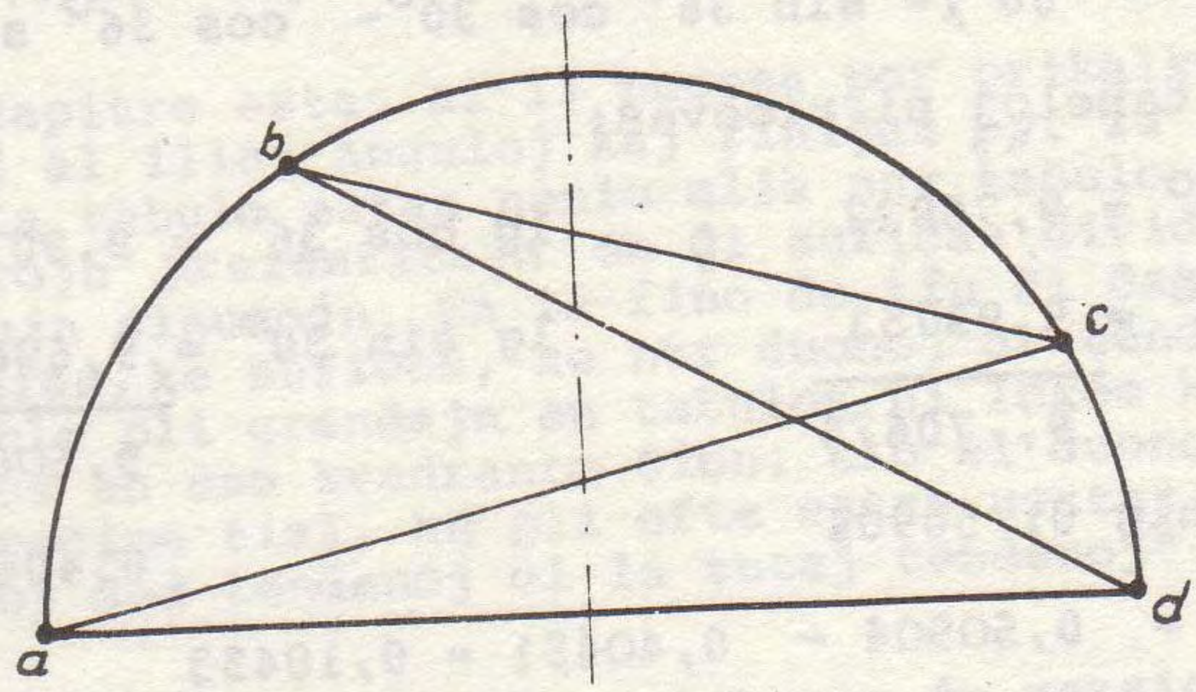
$\frac{ab}{bd} = \frac{ae}{cd}$; de tio ni ricevos:

$bc.\ ad = ce.bd$
$ab.\ cd = ae.bd$ sumigante la flankojn ni ricevos:
$bc.\ ad + ab.\ cd = bd\ (ce + ae)$ sed sur la desegno videblas ke:
$ce + ae = ac$ do:
$ac.\ bd = bc.\ ad + ab.\ cd$ k.e.p.p.

La III-a TEOREMO "El tio rezultas, ke se en unu duoncirklo estas difinitaj la tendenoj de du neegalaj arkoj, konata estos ankaŭ la tendeno de diferenco inter tiuj arkoj".

Do a d estu diametro de cirklo. La teoremo diras: se ni havus difinitajn a b kaj a c (desegno 2), ni do povas prikalkuli b c.

La necesajn por tio nekonatajn a c kaj b d, li elkalkulas helpe de la teoremo de Pitagoro el orttrianguloj a b d kaj a c d. En nia nuntempa formuligo tiu ĉi teoremo estas formulo de sinusoj por diferenco de du anguloj.



des. 2

Per la teoremo III Kopernik kalkulas de la konataj tendenoj a_6 kaj a_5 la tendenon rilatantan al angulo 12-grada kaj rezulte li ricevas 12905. Tiu ĉi valoro estas la sinuso de 6 gradoj multiplikita per 200000.

Ni kalkulu tiun ĉi valoron laŭ Kopernik - kaj nuntempa metodoj. Ĉe Kopernik: El la rilato ricevita per teoremo de Ptolomeo restas nekonata bc (desegno 2)

$$bc = - \frac{ac \cdot bd - ab \cdot cd}{ad}$$

Estu ad = 200 000 kiel diametro de la cirklo

ab = 100 000 kiel a_6, kio rilatas angulon 60°

ac = 117 557 " a_5 " " " 72°

Estantajn en la formulo nekonatajn valorojn bd kaj cd li prikalkulas per la teoremo de Pitagoro el orttrianguloj abd kaj acd.

Estos:

$(bd)^2 = (ad)^2 - (ab)^2 = 200000^2 - 100000^2$ el tio, post operacioj:

bd= 173 222 kaj simile:

$(cd)^2 = (ad)^2 - (ac)^2 = 200000^2 - 117557^2$ do:

cd= 161 496

Post substituo de ĉi tiuj valoroj al formulo por bc ni ricevas:

$$bc = \frac{117\ 557 . 173\ 222 - 100000 - 161\ 496}{200\ 000} = 20\ 907$$

Dividante ĉi tiun lastan valoron per 200 000 ni ricevos

$\sin 6^o = 104\ 525$

Nuntempe ni kalkuladus laŭ maniero:

$$\sin \tfrac{1}{2}(72^o - 60^o) = \sin 36^o \cos 30^o - \cos 36^o \sin 30^o = \sin 6^o$$

Per logaritmaj tabeloj ni ricevas:

lg sin 36° =	9,75922	lg cos 36° =	9,90796
lg cos 30° =	9,93753	lg sin 30° =	9,69897
post sumigo:	9, 70675		9,60693
	nlg 0, 50904		0,40451; el tio:

$\sin 6^o$ = 0,50904 - 0,40451 = 0,10453

Ni ricevis la valoron tute egalan al tiu de Kopernik (al la leganto ni proponas plenumi ĉiujn kalkulojn kaj kompari necesajn por tio tempojn)

LA IV-A TEOREMO " Havante tendenon de iu ajn arko oni povas determini la tendenon de la duono de tiu ĉi arko".
En la nuntempa formuligo ĉi tiu teoremo havas formon:

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

Tiu ĉi teoremo permesas al li prikalkuli tendenojn de 3°,

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^{\circ} \text{ kaj } \left(\frac{3}{4}\right)^{\circ}$$

LA V-A TEOREMO " Se estos donitaj tendenoj de du arkoj, do estos ankaŭ donita la tendeno de sumo de tiuj arkoj".
En nia formo tio estas formulo por sinuso de du anguloj.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

LA VI-A TEOREMO - la lasta teoremo de tiu grupo temas pri tio, ke la rilato inter longeco de du arkoj pli grandas ol rilato inter iliaj tendenoj. En la tasko aldonita al tiu ĉi teoremo, Kopernik prezentas pruvon, ke se la arko malgrandiĝas, la rilato de tendeno al arko direktiĝas al unuo. La pruvon li faras per nombroj prenante kiel elirpunkton la tendenojn 5235 kaj 2618 de la anguloj 3°, $\left(1\frac{1}{2}\right)^{\circ}$ kaj poste la arkojn $\left(1\frac{1}{2}\right)^{\circ}$ kaj $\left(\frac{3}{4}\right)^{\circ}$ kun la tendenoj 2618 kaj 1309. Do li ricevis, ke por la malgrandaj anguloj rilato de du anguloj egalas rilaton de iliaj tendenoj. La teoremo VI, kune kun la tasko, estis por li necesa por prikalkuli tendenon rilatantan al la arko 1° kiel egalan al sumo de tendenoj prezentantaj $\left(\frac{3}{4}\right)^{\circ}$ kaj $\frac{1}{3}$ da tendeno de $\left(\frac{3}{4}\right)^{\circ}$ kio en la fina efekto donas:

$$1309 + \frac{1}{3}\,1309 = 1745$$

Poste, bazante sur la teoremo IV, li prikalkulas la tendenojn prezentitaj de $(1/2)^{\circ}$ kaj $(1/3)^{\circ}$.

La tuta ĉapitro estas al li necesa por prikalkulo de tendenoj rilatantaj al iliaj anguloj kaj finiĝas per la tabulo de tiuj tendenoj. La tabulo estas nenio alia nur tabulo de angulsinusoj. La valorojn prezentitajn en ĝi sufiĉas dividi per 100 000 por ricevi niajn sinusojn. En la fino de tiu ĉi ĉapitro ni legas "Tamen mi opinias, ke sufiĉos, ke nur duonoj de tendenoj apogantaj la arkojn duoble pli grandajn en tabulon ni lokos kaj per tiu mallongigo fermos en unu kvadranto ĉion, kio al duoncirklo oni povas etendi; precipe tial, ke pli ofte estas uzataj en pruvado kaj kalkuloj duonoj de tendenoj ol la tutaj tendenoj".

Se temas pri tabuloj, li prilaboris du versiojn. La tabuloj "De lateribus..." estas prikalkulitaj por la argumento varianta je ĉiu minuto. Tie li ankaŭ prezentis la tabulojn de sinusoj (mi ankoraŭfoje substrekas , ke li ne uzis la vorton sinus) por kompletigo de la konataj anguloj ĝis 90°, ĉar $\sin(90-a) = \cos a$, tio signifas, ke li prezentis ankaŭ la tabulojn de kosinusoj kaj eĉ laŭ la nuntempe uzata sistemo. Sed en la tabuloj publikigitaj en

"De revolutionibus..." en la j.1543., la angulo varias po 10 minutoj. En ambau tabuloj li prezentas diferencojn tiel necesajn ĉe interpolado. Ĉi tie oni devas mencii tabulojn kalkulitajn de Kopernik kaj skribitajn sur la marĝenojn de Regiomontan-tabuloj. Tio estas verŝajne unuafoje prikalkulitaj tabuloj de sekansoj (ĉirkaŭ la j.1520). Ĉi tiuj tabuloj estas kalkulitaj por eviti klopodan dividadon.

Naskiĝas demando, kial Kopernik mem kalkuladis siajn tabulojn kvankam li havis la tabulojn de Ptolomeo. La diferencojinter liaj tabuloj kaj la tabuloj de Ptolomeo estas tiom grandaj, ke oni ne povas suspekti, ke li nur trakalkulis la tabulojn de Ptolomeo. La diferencoj estas jenaj: la tabeloj de Ptolomeo estas prezentitaj en la sesdeka sistemo kaj la tabeloj de Kopernik en la decimala sistemo.Due - Ptolomeo prezentas tutajn tendenojn kaj Kopernik nur iliajn duonojn, trie - argumento ĉe Ptolomeo variiĝas po 15 minutoj , kaj ĉe Kopernik po 1 minuto en la trigonometrio kaj po 10 minutoj en "De revolutionibus..."

La sekvanta ĉapitro de Kopernik-trigonometrio (XVIII, Vol.1 "De rev...") estas dediĉita al solvmetodoj de ebenaj trianguloj . En ĝi li konsideras sep kazojn. Li komencas de la kazo, kiam estas donitaj la anguloj de triangulo kaj oni devas trovi ĝiajn laterojn. Enskribante triangulon kun la donitaj anguloj en cirklon kun la radiuso 100 000 li asertas, ke li havis la konatajn arkojn korespondaj al konataj anguloj, sed la serĉataj lateroj de la triangulo estas tendenoj de tiuj ĉi arkoj kaj li trovas ĉi tiujn laterojn en la propre prikalkulita kaj supremenciita tabelo de tendenoj.

Simile li solvas ceterajn kazojn. Se temas pri orttriangulo, li aplikas teoremon de Pitagoro. En la lasta kazo li konsideras la triangulon, en kiu estas konataj lateroj kaj serĉataj anguloj. En tiu kazo li aplikas sen iuj rezervoj la ĝeneraligitan teoremon de Pitagoro por elkalkuli la angulojn. Oni devas mencii, ke inter la konsideratajde Kopernik kazoj mankas la plej facila,t.e.tiam kiam estas konataj du anguloj kaj unu latero. Verŝajne li opiniis ke ĝi estas tiel facila, ke ne valoras okupiĝi pri tio.

La lasta ĉapitro estas la plej ampleksa. Per 15 teoremoj (li ne nomas ilin teoremoj) li priskribas ecojn kaj rilatojn inter lateroj kaj anguloj en la sferaj trianguloj. Du unuaj estas ĝuste difinoj rilatantaj triangulojn. La sferan triangulon li difinis kiel figuron el tri arkoj de la grandaj cirkloj kaj li postulas, ke arko, kiel latero de la triangulo, estu pli malgranda ol duoncirklo. Nur la teoremo III donas iujn ligojn inter lateroj kaj anguloj de triangulo, sed nur de la orta triangulo. Ni prezentu por ekzemplo la esencon de tiu ĉi teoremo en formuligo de Kopernik. "En sfertriangulo, havanta ortangulon, la tendeno de duobligita hipotenuzo tiel rilatas la tendenon de la duobligita tendeno el katetoj kiel diametro de la sfero rilatas al tendeno de la duobligita arko prezentanta angulon kontraŭan al la kateto.

Nun tiu ĉi teoremo aspektus jene:

$$\sin c \sin A = R \sin a \qquad \text{(ni akceptas } R=1\text{)}.$$

Do tio estas la formulo de sinusoj por orta triangulo. Tiun ĉi teoremon li tre ofte uzas, ĉar ĉiun kazon li reduktas per konvena dispartigo al orta triangulo. En la aserto IV li diras, ke por solvi ortan triangulon necesas koni la duan angulon kaj lateron. El liaj konsideroj en la demonstro de tiu teoremo rezultas, ke prezentitan supre formulon de sinusoj, kompreneble en la propra formo, li aplikis nur al ortaj trianguloj.

Priskribo de ĉiuj kazoj, kiujn li konsideris, estus por legantoj tro longa, do ni opinias ke sufiĉos, se ni diros, ke pluaj teoremoj enhavas ĉiujn kazojn aperantaj ĉe solvado de sferaj trianguloj kaj ankaŭ iliaj kongruoj. Oni devas ĉi tie diri kaj forte substreki, ke Kopernik enkondukas kaj demonstras rilatojn inter la elementoj de sfera triangulo per aplikado de konvena rezonado el la ebena trigonometrio. Pro tio la sistemo de lia trigonometrio estas tia, ke unue li prikalkulas la tabelojn, kiuj estas al li necesaj por solvado de ebenaj trianguloj, por poste - per konvena rezonado - transiri de ebenaj al sferaj trianguloj.

La neceso apogiĝi sur la sfera orta triangulo rezultis unue el nescio pri ceteraj formuloj de la sfera trigonometrio, due - la formulo de sinusoj en apliko al ortaj trianguloj estas tre simpla kaj plifaciligas al li la kalkuladon.

En fino de sia trigonometrio li skribas: "Tiom pri la trianguloj por nia intenco estis necesa. Se ĉion ni volus, tiu ĉi laboraĵo formigus la apartan verkon". Kiel sekvas el la citaĵo, matematiko estis por Kopernik ilo kaj ne celo. Tamen liaj provoj ligitaj kun plifaciligo de la astronomiaj kalkuloj estis impulso por J. Neper, kiu en la j. 1614 eltrovis logaritmojn. La trigonometrion de Kopernik sekvis J. Rheticus kaj ankaŭ K. Rothman, kiu en la jaroj 1580-1590 verkis sub influo de Kopernik la libron "La teorio de trianguloj". Oni povas trovi signojn de la Kopernika trigonometrio en verkoj de Viète kaj Neper.

Por la fino oni devas aldiri, ke Kopernik estas la unua, kiu rimarkis kaj ĝuste valorigis kelkajn ecojn de averaĝo, skribante ke ĝi havas pli grandan certecon ol unuopa valoro. Tio ĉi okazis 200 jarojn antaŭ la granda Jakobo Bernoulli, por kiu la averaĝo estis fundamento de la tuta praktika matematiko.

FINALO
INFLUO DE MATEMATIKO JE ASTRONOMIO

Kiel ni diris supre, la plifaciligoj enkondukitaj de Kopernik ĉe la astronomiaj kalkuloj estis impulso por Neper enkonduki logaritmojn. Ankoraŭ pli frue Rheticus prikalkulis la tabelojn de sinusoj, tangentoj, sekantoj ĝis dek kvin frakciciferoj. La malfacilaĵoj ligitaj kun solvado de la sferaj trianguloj inklinigis matematikiston Viète al la preciza prilaboro kaj finfaro de la sfera

trigonometrio. Jam oni ne bezonas dismeti laŭvolan triangulon je ortaj trianguloj, sed solvadi ĝin senpere.

La mirinda reguleco en la principoj de planedmovado, formulitaj de Kepler, alkondukis I. Newton en la j. 1665-1666 al malkovro de la diferenciala kaj integrala kalkuloj por priskribi moviĝon de astroj. La kaŭzo reganta planedmoviĝon evidentiĝis en la regulo de ĝenerala gravito kaj de tie jam Newton tre mallongan vojon havis al la teorio de potencialo.

La mekaniko de ĉielo estis do unua scienco, kiu siajn principojn notis per diferencialaj ekvacioj. La sekvojn de tiuj ekvacioj serĉis tiaj matematikistoj kiel L. Euler, Clairaut, J.L. Dalambert, J.L.Lagrange kaj P.S.Laplace, kiujn oni povis nomi kreintoj de la moderna ĉielmekaniko. Ekz. Lagrange solvante ekvaciojn de kometvojoj prilaboris metodon de variigo de konstantoj por solvado de diferencialaj ekvacioj.

En la XIX jc., kiam okazis, ke diferencialaj ekvacioj de mekaniko ne havas ĝeneralajn solvojn, oni komencis unuflanke serĉi principajn solvojn. Ĉi tio alkondukis al la disvolvo de teorio de periodaj solvoj, kiuj trovis tre larĝan aplikon, ekzemple en radioteknikо. Aliflanke oni serĉis proksimumajn solvojn, kiuj eniris ĉiujn sciencojn priskribantaj siajn principojn per la diferencialaj ekvacioj.

Tradukis Tadeo Krawiec