Refuto de kombinatorika konjekto de P. Turán

Ulrich Matthias (DE)

k-grafiko aŭ *k-uniforma hipergrafiko* G estas paro (V,E), kie $V = V(G)$ estas aro kaj $E = E(G)$ estas familio de k-elementaj subaroj de V. $n = n(G) := |V|$ estas la *ordo* de G, dum $e = e(G) := |E|$ estas ĝia *grando*. La elementoj de V nomiĝas *verticoj* kaj la elementoj de E k-*eĝoj* aŭ, mallonge, *eĝoj* de G. Por aro $S \subset V$ ni difinas la gradon d(S) kiel la nombron de la eĝoj entenantaj S. G_1 nomiĝas *subgrafiko* de G_2, se $V(G_1) \subset V(G2)$ kaj $E(G_1) \subset E(G2)$.

Tiu k-grafiko G kun ordo r, por kiu ĉiu k-elementa subaro de V(G) estas elemento de E(G), nomiĝas $K_r^{(k)}$, la *kompleta* k-grafiko de ordo r.

P. Turán [1] demandis pri la valoroj de la funkcio $ex(n,K_r^{(k)})$, difinita kiel la maksimuma grando de k-grafiko de ordo n entenanta neniun $K_r^{(k)}$.

Li konjektis, ke se $m := (r-1) / (k-1)$ estas entjera, tiam la sekva konstruo liveras *ekstreman* k-grafikon, t.e. k-grafikon de ordo n kaj grando $ex(n,K_r^{(k)})$, kiu entenas neniun $K_r^{(k)}$: Dividu n verticojn en m disajn klasojn, kiuj estu tiel egale grandaj kiel eblas, kaj

prenu kiel eĝojn ĉiujn arojn de k verticoj, kiuj ne ĉiuj troviĝas en la sama klaso.

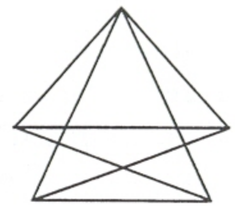

Fig. 1

Ni nomas la ĵus konstruitan k-grafikon $T_m^{(k)}(n)$; Fig. 1 montras la 2-grafikon $T_3^{(2)}(5)$. Se ni nomas la aron de la ekstremaj k-grafikoj $EX(n,K_r^{(k)})$, ni povas formuli la konjekton de Turán jene:

$$T_m^{(k)}(n) \in EX(n,K_r^{(k)}) \text{ por ĉiuj entjeraj } k \geq 2,\ m \geq 2$$

kun $m = (r-1) / k-1)$.

Turán pruvis sian konjekton por $k=2$. Ni montras, ke en la kazo $r < k^2-3k+3$ ĝi estas malĝusta por ĉiu sufiĉe granda n. Tiucele ni unue konstatas, ke ĉiu ekstrema k-grafiko $G \in EX(n,K_r^{(k)})$ devas plenumi la sekvan kondiĉon:

(*) $d(S) \geq ex(n-k+2,K^{(2)}_{r-k+2})$ por ĉiu $(k-2)$-elementa aro $S \subset V(G)$.

Se tiu ĉi kondiĉo ne estus plenumita, ni povus plialtigi la grandon de G sen ke estiĝas iu $K_r^{(k)}$: Konstruu sur la verticaro $V(G)-S$ iun ekstreman k-grafikon $H \in EX(n-k+2,K^{(2)}_{r-k+2})$. Forigu de G ĉiujn k-eĝojn entenantajn S kiel subaron kaj aldonu kiel novajn k-eĝojn ĉiujn uniojn de S kun unu el la $ex(n-k+2,K^{(2)}_{r-k+2})$ 2-eĝoj de H. Ni tiam ricevas k-grafikon G' kun grando:

$$e(G') = e(G) - d(S) + ex(n-k+2,K^{(2)}_{r-k+2}) > e(G).$$

Laŭ nia konstruo ankaŭ G' entenas neniun $K_r^{(k)}$ kiel subgrafikon, ĉar ties verticaro rajtus nek enteni nek ne enteni S kiel subaron. Sekve G ne estis ekstrema. Ni do ricevas kontraŭdiron.

Ĉar la konjekto de TURÁN estas ĝusta por k=2, ni povas determini la valoron de $ex(n-k+2,K^{(2)}_{r-k+2})$. La probablo, ke iu paro el $n-k+2$ verticoj ne estas eĝo de fiksita 2-grafiko $T_m^{(2)}(n-k+2)$ kun $m=r-k+1$ konverĝas por $n \to \infty$ al $1/m = 1/(r-k+1)$; sekve $ex(n-k+2,K^{(2)}_{r-k+2})$

$= (1 - 1/(r-k+1)) \binom{n}{2} + o(n^2)$, kie $o(n^2)$ estas funkcio, kiu dividite per n^2 konverĝas al 0 por $n \to \infty$.

El (*) do sekvas

(**) $d(S) \geq (1 - 1/(r-k+1)) \binom{n}{2} + o(n^2)$.

Ni nun montras, ke por $r < k^2-3k+3$ la k-grafiko $T_m^{(k)}(n)$ ne ĉiam plenumas tiun ĉi kondiĉon: Se S konsistas el $k-2$ verticoj el nur unu vertica klaso de la $T_m^{(k)}(n)$, tiam

(***) $d(S) = (1 - 1/m^2) \binom{n}{2} + o(n^2)$,

ĉar por paro de du pliaj verticoj el $V(T_m^{(k)}(n))$ la probablo, ke ili ambaŭ troviĝas en la sama vertica klaso kiel S [kaj ne formas kune kun S eĝon de la $T_m^{(k)}(n)$], konverĝas por $n \to \infty$ al $1/m^2$.

El nia premiso $r < k^2-3k+3$ kaj la difino $m := (r-1)/(k-1)$ sekvas:

$$r-1 < (k-1)(k-2) \text{ kaj do } m < k-2,$$

sekve $r-k+1 = m(k-1)+1-k+1 = (m-1)(k-1)+1 > (m-1)(m+1) + 1 = m^2$

kaj do $1 - 1 / (r-k+1) > 1 - 1 / m^2$.

Pro tio (**) kontraŭdiras al (***), se n estas sufiĉe granda, kaj ni pruvis:

Teoremo. Por ĉiu paro (k,r) kun $3 \leq k < r < k^2-3k+3$ ekzistas N(k,r) tiel, ke por ĉiu $n \geq N(k,r)$ la konjekto de TURÁN estas malĝusta.

Referenco

[1] P. TURÁN: Applications of graph theory to geometry and potential theory, en *Combinatorial structures and their applications (R. Guy k.a. eld.)*, Gordon and Breach, New York 1970.

Adreso de la aŭtoro:
Ulrich MATTHIAS
Frhr.-v.-Drais-Str. 53
D-68535 Neckarshausen
Germanio

ESPRIMO DE LA MALPROKSIMA PARENCARO

PER LA PREFIKSOJ PRA- KAJ BO-.

Szemök, Balazs (HU)

La plej granda familiaj unuoj estis la gentoj. Ili ĉesis en nia kontinento fine de la mezepoko.

La gentoj konsistis el la t.n. grand-familioj. Tiu unuo funkciis lau sango kaj ekonomio, kaj konsistis el la geavoj kaj ties posteuloj. En tiu kadro vivis ne nur la rektbranĉaj antauuloj kai posteuloj, sed ankau la bofilinoj kaj bofratinoj, (malofte la bofiloj kaj bofratoj, ĉar ĝenerale la edzino transloĝiĝis al la familio de sia edzo). La nepoj de la geavoj estis la kuzoj unu al la aliaj. Tiu familia komunumo ankau ĉesis, sed en la tempo de Zamenhof ankorau ekzistis, li do kreis la nomigon de ĉi tiuj rilatoj.

Kiam mi komencis lerni Esperanton, la plimulto de la loĝantaro, ankau mi, estis vilaĝanoj. La triboj, pli precize la ekonomia unuo, ĉesis, sed la spiritaj tradicioj pluvivis. La malgranda vilaĝo egalis ankorau en mia infanaĝo, al moderna tribo: ĉiu havas ian rilaton al ĉiu. Oni precize indikis ne nur la rektbranĉajn parencojn (prauloj, posteuloj), sed ankau la flankbranĉajn apudulojn. Dum la longaj vintraj versperoj oni profunde pritaksadis, kiu estas kies parenco. La infanoj frue lernis kiun decas kiel alparoli. Kiel komencanta esperantisto mi ne trovis tiujn esprimojn en nia vortaro, do mi iom seniluziiĝis. Mi eksciis nomi la gefratojn de miaj gepatroj, sed ekzemple mi ne sciis, kiel nomi la gefratojn de miaj geavoj kaj prageavoj (mi konis ankorau miajn praavinojn, do mi bezonis tiujn-ĉi esprimojn).

La vortaroj diras, ke la dua flankbranĉa parenco en la sama generacia nivelo estas la kuzo, sed ne informas kiel nomiĝas la dua- kaj triagradaj kuzoj, do la pesimistoj konsekvencis, ke nia lingvo estas malriĉa, ebli ili volis enkonduki neologismojn.

Dank' al la elasteco de nia lingvo mi povis demonstri simplajn solvojn: