

Paradoksoj kaj Apartecoj de la Senfino

José Lourenço CINDRA (BR)

1. Enkonduko

Kiam ni pasas de la finhavaj al la senfinaj grandoj montriĝas neatenditaj proprecoj. Tiuj ĉi proprecoj estas atributoj de la nefinieco. Ili manifestiĝas en la dialektika unueco de finieco kaj nefinieco. Komence povas esti nekompreneble, ke propreco, tiel ĝuste difinita por la sumo de finhavaj nombroj - la komutada propreco, ne validas por iaj senfinaj serioj. Tio ĉi temas pri serioj kondiĉe konverĝaj. Ekzistas teoremo de *Riemann* rilate al tiuj ĉi serioj asertanta, ke depende de permutado de ĝiaj termoj tiuj ĉi serioj povas konverĝi al iu ajn antaŭe elektita nombro.

Alia surprizo estas por ni la senfinaj aroj, en kiuj iaj ekvivalentklasoj povas esti difinitaj inter respektivaj elementoj, eĉ se iu aro estas subaro de alia. Tipaj ekzemploj estas la senfinaj numereblaj aroj kaj la aroj havantaj la kontinupotencon. La paradoksaj proprecoj, karakterizaĵoj de tiuj ĉi aroj, ŝokas nian simplan komprenpovon edukita surbaze de la postulatoj de la formala logiko. Tiuj ĉi estas sendubaj paradoksoj, kiuj, malgraŭ iliaj kontraŭdiraj aspektoj, estis analizitaj kun granda rigoro fare de la prilogikaj matematikistoj. Estas notinde ke, kiel montris *Cantor* kaj *Dedekind*, ĉia senfina aro estas ekvivalenta al iaj subaroj de tiuj ĉi samaj aroj. Tiu ĉi propreco povas servi kiel difino de senfina aro. La parto povas havi la potencon de la tuto. Lau *Dedekind*, la karakterizaĵo de ĉiuj senfinaj aroj estas posedi partojn, kiuj estas kompareblaj kun la tuto. Tiel li difinis senfinan kaj finhavan arojn:

Sistemo *S* estas nefinia, se ĝi estas simila al parto el ĝi mem; kontraŭkaze ĝi estas finia sistemo (*Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872).

Jam en la auroro de la XIX jarcento, la filozofiaj pensoj de *Hegel* kaj la progreso de la matematika kono dum tiu jarcento, ekde *Cauchy* kaj *Gauss* ĝis *Riemann*, *Weierstrass*, *Dedekind* kaj *Cantor*, multe kontribuis al la kompreno de la kontraŭdiroj esence propraj al la nefinieco. Nur *Cantor* sukcesis montri, ke la aksiomo,

laŭ kiu 'la tuto estas pli granda ol ĉiu el ĝiaj partoj', kelkfoje ne estas vera. La tutaj povas havi proprecojn, kiujn certaj elementoj de tiu ĉi sama tuto ne havas. Sed tiu ĉi estas simple manifestiĝo de dialektika aparteco esence propra al la nefiniaj aroj. Verdire, pripensadojn sufiĉe proksimajn al tiu de *Cantor* esprimis la ĉeĥa matematikisto kaj filozofo *Bernhard Bozano* (1781 - 1848). En sia verko 'Paradoksoj de la Infinito' (*Paradoxien des Unendlichen*, postmorte publikita en 1850), *Bolzano* rimarkis kelkajn gravajn proprecojn de la nefiniaj aroj.

2. La racionalismo kaj la koncepto de la senfino

Pripensoj koncerne la senfinon enestis en la verko de mondfama franca filozofo *René Descartes* (1596 - 1650), ekzemple en la *Meditadoj* (1641).

"Estas pli da realo en la senfina substanco ol en la finhava substanco" (*Meditado Tria*, 28).

Koncerne la senfinon ŝajnas, ke elementoj de dialektiko mem jam enestis en verkoj de *Benediktus de Spinoza (Baruĥ Despinosa)* (1632 - 1677), precipe en ties *Etiko*. Kvankam, tie ĉi mi povas paroli nur pri negativa dialektiko, ĉar *Spinoza* ne povis adekvate kompreni kelkajn subtilecojn de la temo. Malsupre mi skribas kelkajn liajn proponojn temantajn pri tio. Ĉiuj asertoj estas el '*Etiko, laŭ matematika metodo prezentita, Parto I*':

"Ĉiu substanco nepre estas senfina" (*Propozicio VIII*).

"Ju pli da realo au ekzistado havas la ento, des pli da atributoj ĝi havas, kiuj esprimas la neceson, au alivorte, la eternecon kaj la nefiniecon" (*Skolio de Prop. X*).

"Dio, au alivorte, la substanco, konsistanta el senfinaj atributoj, ĉiu el ili esprimanta eternan kaj senfinan esencon, nepre ekzistas" (*Prop. XI*).

Descartes diris en la *Meditadoj*, ke "la korpa substanco estas dividebla, sed la spirito estas tute nedividebla" (*Medit. Sesa*, 33). Aliflanke, *Spinoza* asertas, ke "oni ne povas efektive koncepti ian atributon de la substanco, laŭ kiu la substanco povu esti ... dividebla" (*Prop. XII*). Per unu vorto, laŭ koncepto de *Spinoza*, la unika substanco, konsistanta el senfinaj atributoj, estas nedividebla.

Kaj en *Skolio de Prop. XV* li argumentas, ke la dividado de senfina substanco kondukus al absurdaĵo. Li asertas: "La nefinia kvanto estas nemezurebla kaj ne povas formiĝi el finiaj partoj". Li konsideras, ke se oni dividas la senfinan substancan en du finhavaj partoj, la senfino estus konsistanta el du finhavaj partoj, kaj tio estus absurdaĵo. Sed, se tiuj partoj estas finhavaj, ekzistus duobla senfino el alia senfino (dua senfino el unu), kaj ankau tio estus absurdaĵo.

Estas notinde, ke - kontraste al *Descartes* - lau *Spinoza* ekzistas nur unu substanco konsistanta el senfinaj atributoj. Tial, kiam li kontestas la dividadon de la substanco, tio ĉi temas pri korpa substanco au spirito kiel modoj de unika senfina substanco. La rezonadoj de *Spinoza* montras, ke li simple ne povis transiri la matematikajn limojn de sia tempo. Li intuicie akceptis la aksiomon, kiun efektive ĉiuj akceptis, nome ke la parto ne povas egali al la tuto.

Aliflanke, konsiderante la nefiniecon kaj la finiecon kiel kontraŭaĵojn, nek al *Spinoza* nek antaue al *Descartes* prezentiĝis la problemo, lau kiu la nefinieco povus deveni el finieco mem. Tiuj ĉi aspektoj de la dialektiko de la senfino rilate al la finieco nur poste klariĝis.

3. La matematikaj aroj kaj la senfino

La naturo de la senfino, esence dialektika, jam estis ekzamenita, kvankam ankoraŭ sufiĉe intuicimaniere, tamen kun granda saĝeco, de *Galilejo* mem en la komenco de la klasika fiziko. Ŝajnas, ke *Galilejo* estis tro impresita de la problemo pri la interrespondo inter du senfinaj aroj. La konjektoj de *Galilejo* aperis sufiĉe klaraj en lia verko *Diskursoj (Discorsi, 1638)*. Lia intenco estis kompari aron de ĉiuj naturaj nombroj kun la aro de ĉiuj kvadrataj nombroj kaj kun la aro de ĉiuj kvadrataj radikoj montrante, ke tiuj ĉi aroj estas senfinaj. Li konjektis, preskau senerare, ke la konceptoj de *pli*, *malpli* kaj *egala* ne aplikiĝas al la nefiniaĵo. Li montris intencon por la kompreno de la nefiniaj grandoj kaj de la infinitezimaj grandoj. La astronomiaj demandoj faris, ke li spekulativis pri la ebleco de senfina universo, kvankam li fakte ne konsentis al tiu ebleco.

Aliflanke, la serĉado pri la leĝoj de la movo faris, ke montriĝis al li la infinitezimaj grandoj: la koncepto de *ĉi tie kaj nun*, la koncepto de momenta rapideco, provizora skizo de la diferenciala movkoncepto.

"La koncepto de senfino ĉe *Galilejo* ankoraŭ ne prenis adekvatan matematikan formon, por la analizo de la infinitezimaj grandoj, sed ĝi forte alproksimiĝis al tiu ĉi idealo. Kun *Galilejo* komenciĝis la nocio de senfinaj aroj de sama potenco" (*Kouznetsov, 1974, p. 66*).

En la antikva epoko *Zenon*, disciplo de *Parmenides*, rimarkis kelkajn paradoksojn koncerne la kontinuan kaj la senfinon. Poste *Aristoteles* konceptis du klasojn de senfinoj: la *potenciala senfino*, restanta finhava ĉiumomente, kaj la *aktuala senfino* au *perfekta senfino*, signifanta nefinian ekzistantan grandon. Li rifuzis la ekzistadon de la *aktuala senfino*, sed akceptis la *potencialan senfinon*. Lau lia opinio, la universo (la aristotela kosmo) estis senfina en la tempo (potenciala senfino), sed finhava en la spaco. *Aristoteles* diris, ke la senfino povas ekzisti nek kiel io montranta aktualan ekzistadon, nek kiel substanco, nek kiel principo.

Aliflanke, *Hegel* en la ĉapitro nomita *La Kvanta Senfino* de lia verko *Scienco de la Logiko* diskutis pri la koncepto de la senfino, sed ĉiam en la dialektika unueco kun ĝia kontraŭa koncepto de finhava granda. Lau opinio de *Hegel*, la ideo de la senfino estas la intelektuala kontemplado de iu senfine kreskanta granda (*aktuala senfino*); la bildo prezentanta senliman nombran sinsekvon, al kiu oni povas ĉiam aldoni plian nombron *ad infinitum*, estas nur enuiga tasko. Tial li konsideris ĝin seninteresa. Li asertis, ke ĝi estas fakte - kiom ajn frapanta tio povas ŝajni - ia kvazau nefiniaĵo restanta ĉiam finhava. Tiu ĉi grandega panoramo de la senfino (*malbona nefiniaĵo* lau hegela terminaro) estas evidenta en la poemo de la svisa medicinisto kaj poeto *Albrecht von Haller* (1708 - 1777); tiun ĉi poemon *Kant* rigardis "*priskribo de la eterneco, kiu kausas frostotremojn*" (*Kouznetsov, 1973, p. 260*). Jen libera traduko:

Mi adicias grandegajn nombrojn,
Montojn da milionoj mi kunamasigas,
Mi amasigas tempon sur tempo kaj mondon sur mond',

Kaj kiam, el tiu ĉi terura altec'
Vertiĝe mi denove alrigardas vin,
La tuta potenco de la nombro,
Multigita milfoje,
Ankorau ne estas parto el vi.

*Mi forprenas vin, kaj jen vi estas tutplena antau mi. *)*

Hegel insistis pri tio, ke tiu ĉi priskribo de la senfino estas nur senfine sinsekva ŝanĝo el iu kvanto al alia, kaj aparte, el nombro transe de si mem; ke tiu ĉi priskribo prezentas sinsekvon de limoj, kiuj estas metitaj kaj retirataj alterne tiel, ke ni antaŭenirante fakte atingas nenion. Se *Kant* vidis en tiuj ĉi versoj "la priskribon de la eterneco, kiu kausas frostotremon", dirante ke la grandeco de la senfino eĉ kausas vertiĝon, *Hegel* kontraŭante tiun ĉi aserton rimarkas, ke la lasta strofo de la poemo, (la nura, kiu lau lia opinio estas signifoplena), esprimas la ideon, ke la finieco kaj la senfinieco estas nedisigeblaj. *Hegel* insistas ke, se oni volas kompreni la senfinon, oni nepre devas refuti la *progressus infinitum*. En tiu ĉi demando ŝajnas, ke *Hegel*, kvankam el tute alia vidpunkto, ĝustadire malgrau sia malŝata rilato al matematika rezonado, alproksimiĝis al la verkoj de venontaj grandaj matematikistoj en la dua duono de la XIX jarcento, precipe al *Dedekind* kaj *Cantor*.

Pri tiu ĉi afero *Kouznetsov* argumentas, ke lau opinio de *Hegel* ne estas la senfino mem - la *senpera senfino*, la *malbona senfino*, kiu mirigas nin, kiu pligrandigas nin intelekte, sed la *interrespondo inter la mezuroj kaj la leĝoj*, kiun la racio konstatas en la objektoj. Tio ĉi temas pri *racia senfino* kontraste al la *neracia senfino*. *Kouznetsov* klarigas tion dirante ke, se oni volas fari cirkonferencon, oni ne bezonas kurbigi linion je cent punktoj, je mil punktoj au je miliono da punktoj, sed oni simple kurbigas ĝin je cirkonferenco; por tio oni difinas leĝon (ekz. la ekvacion de la cirklo).

Ni povas kompari tiun ĉi rezonadon kun la koncepto de nenombreblaj aroj. Estus vana intenco serĉi nombradon de la elementojn de tiuj ĉi aroj, nombri ion esence nenombreblan. Tamen, kiel montris la matematikisto *Georg Cantor* (1845-1918) en la 1870aj jaroj kaj poste, oni povis malgrau tio malkaŝi la plej

esencajn proprecojn de tiuj ĉi aroj (*Klein*, 1924, *Aneksaĵoj*). *Cantor*, kiel *Dedekind*, konstatis la fundamentan proprecon de senfinaj aroj, sed *Cantor* vidis, malsame (ne 'kontraste') al *Dedekind*, ke ne ĉiuj nefiniaj aroj similas. Li sukcesis konstrui hierarkion de nefiniaj aroj lau la *potenco de la aro* (*Mächtigkeit der Menge* au *power of the set*). Oni povas fari racian priskribon de tiuj ĉi aroj difinante adekvatajn komparkriteriojn. Du aroj havas la saman potencon, se inter iliaj elementoj oni povas difini unusignifan interrespondon; kontraŭkaze oni diras, ke la aroj havas malsamajn potencojn.

Algebra nombro estas nombro, kiu povas esti radikoj de polinoma ekvacio kun entjeraj koeficientoj, alie ĝi estas transcenda nombro. Nia intuicio diras, ke la tutaro de la raciaj nombroj estas pli kompakta ol tiu de la naturaj nombroj kaj ke la algebraj nombroj estas aranĝitaj en ankoraŭ pli densa formo, kaj ke fine la tutaro de la reelaj nombroj, la *aritmetika kontinuo*, estas la ultradensa medio, la pleno - malgrau ke estis konstatite, ke la aro de la raciaj nombroj, same kiel la aro de la algebraj nombroj, estas numereblaj aroj (kiuj havas la saman potencon kiel la entjeroj). Aliflanke, la aro de la transcenda nombroj kiel e , π , e^x , $\ln x$ - kvankam ili estas parto de la aro de reelaj nombroj - havas komune kun tiuj ĉi la fakton, ke ili ambau havas la potencon de la kontinuo.

La algebraj nombroj estas kvazau provinco en la tutaro de la reelaj nombroj. La tutaro de transcenda nombroj estas multe pli vasta ol la tutaro de algebraj nombroj. Sufiĉas rimarki, ke, krom la kazo $y=1$, $x=0$, la ekvacio $y=e^x$ ne povas solviĝi per algebraj nombroj, ĉar ekzistas teoremo asertanta, ke en la ekvacio $e^\beta = b$ la nombroj β kaj b ne povas esti algebraj samtempe krom la triviala okazo $\beta=0$, $b=1$. Konsiderante ke $e^{i\pi} = -1$, ($e^{i\pi} + 1=0$, t. e. $e^{i\pi} = \cos\pi + i \sin\pi = -1$) estas demonstrite, ke π estas transcenda nombro.

Referencoj

Boyer, Carl B., *A History of Mathematics*, John & Sons Inc., New York, London, Sydney, 1968.

Cottingham, J., *A Filosofia de Descartes*, Edições 70, Lisbona, Portugalio, 1989. Traduko de M^a do Rosário Sousa Guedes el la angla lingvo sub la titolo *Descartes*, 1986.

Espinosa, Baruch, *Ética*, Kolekto Os Pensadores, Eldonejo Nova Cultural, Sao Paulo, Brazilo, 1991.

Galileu Galilei, *Duas Novas Ciências*, Nova Stella Editorial, 2 Edição, Sao Paulo, Brazilo, 1988. Traduko de Letizio Mariconda kaj Pablo R. Mariconda el la origina verko *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla Meccanica ed ai Movimenti Locali*, Galilejo, 1638.

Klein, Felix, *Elementarnaja Matematika s Tocki Zrenja Visei*, Eldonejo Nauka, Moskvo, 1987. Tradukita al la rusa lingvo el la origina *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkt aus*, Erster Band, Eldono de Julius Springer, Berlino, 1924.

Kouznetsov, Boris, *Galilée*, Eldonejo Mir, Moskvo, 1973.

Kouznetsov, Boris, *Istoria Filosofii dlja Fizikov i Matematikov*, Eldonejo Nauka, Moskvo, 1974.

*)Tio ĉi estas la respektiva parto el la germanlingva origina poemo:

Albrecht von Haller ("La Alpoj", 1729):

Ich häufe ungeheure Zahlen,

Gebirge von Millionen auf,

Ich setze Zeit auf Zeit und Welt auf Welt zu Hauf,

Und wenn ich von der grausen Höh'

Mit Schwindeln wieder nach dir seh',

Ist alle Macht der Zahlen,

Vermehrt zu Tausend malen,

Noch nicht ein Teil von dir.

Ich zieh' sie ab, und du liegst ganz vor mir.

Mi volas danki s-ron Jacques Joguein por gravaj rimarkoj koncernantaj la korektadon de tiu ĉi artikolo.

José Lourenço CINDRA

Rua Sebastião Nestor de Almeida, 101 - Portal das Colinas

12500-000 GUARATINGUETA - SP

BRAZILIO

VIAGRA™

Pfizer, Inc., Eastern Point Road, Groton CT 06340 USA

IUPAC-formulado de Sildenafil

El ĵurnaloj kaj popularsciencaj revuoj ni ekscias, ke distribuiĝas nova medikamento nome Viagra, kiu okazigas specifan intereson antaŭ ĉio ĉe viroj. Tiu raporto koncernas kemian kaj funkciajn vidpunktojn.

Produktanto de la farmaciaĵo estas la firmao Pfizer, *Pharmaceutical Production Corp., Ringaskiddy, County Cork, Ireland*. *Viagra™* estas la propraĵa kaj komerca nomo (*Trade Mark*) de la produktanto. La nepropraĵa nomo laŭ *USAN (United States Adopted Name)* kaj *BAN (British Approved Name)* estas *Sildenafil Citrate*, la *I.N.N (International Nonproprietary Name)* *Sildenafil*.

USAN-Permission Number 1998:7242

BAN-Code Designation UK-92480-10

WHO (World Health Organisation)-Number 7374.

La patento 5250534 finiĝas je la 18a de junio 2011.

Por kemiistoj gravas la *M.I. (Merck Index)* kaj la *CAS (Chemical Abstracts Service) Registry Number 171599-83-0*; sub tiu numero estas priskribita la kemia substanco, kiu estas terapeute efikanta blanka pulvoro, solvebla en akvo 3,5 mg/mL.

La molekulfomulo: $C_{22}H_{30}N_6O_4S \cdot C_6H_8O_7$

la molekulezo de la Citrato: 666.7

la molekulezo de *Sildenafil*: 474.6

la fandiĝintervalo 191 - 202° C.

La dozado por medicina apliko okazas per blufilmkovritaj tablojdoj enhavantaj 25, 50 au 100 mg *Sildenafil*, prenitaj perbuŝe; sed ili enhavas ankoraŭ jenajn neaktivajn aldonaĵojn: mikrokristala celulozo, anhidra dubaza calciofosfato, *crosscar-mellose sodium* (karboksimetilceluloza natrio), magnesioestearato, hidroksipropil metilcelulozo, titaniodioksido, laktozo, *triacetino I.N.N. (CAS 102-76-1)*, *FD* kaj C-blauo-aluminiolakfilmo.